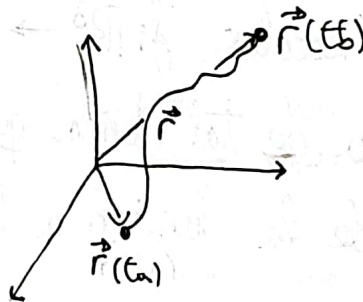
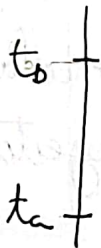


1. CÁLCULO VECTORIAL

1.1. LINEAS, SUPERFICIES Y VOLUMENES:

Una curva es, definida paramétricamente, una función $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$.

Se puede interpretar como el movimiento de una partícula en un tiempo $t \in [a, b]$.



El vector velocidad de una curva en un punto dado se puede entender como el "próximo" movimiento de la partícula, es decir, en una variación t infinitesimal la variación de \vec{r} :

$$\vec{v} \cdot dt = d\vec{r} \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v \cdot \hat{t}$$

Por su definición, \vec{v} siempre será tangente a la curva en un punto determinado.

Para calcular la longitud de una curva lo que hacemos es sumar cada una de las variaciones infinitesimales de t por la velocidad por el tiempo en cada uno de los tiempos, obteniendo:

$$L_{ab} = \int_a^b \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \cdot dt \Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \cdot dt = dl \Rightarrow \text{elemento arco de curva de arco de curva.}$$

Una vez tenemos esto podemos definir dos conceptos interesantes: la integral de línea de una función escalar y una vectorial.

Una función escalar $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ puede integrarse a lo largo de una curva de tal forma que vayamos sumando cada uno de los valores de la función a lo largo de esa trayectoria:

$$\int_c f \cdot dl = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \cdot dt$$

Una función vectorial $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ puede integrarse a lo largo de una curva de tal forma que vamos sumando los productos escalares de la función vectorial por el vector tangente:

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt.$$

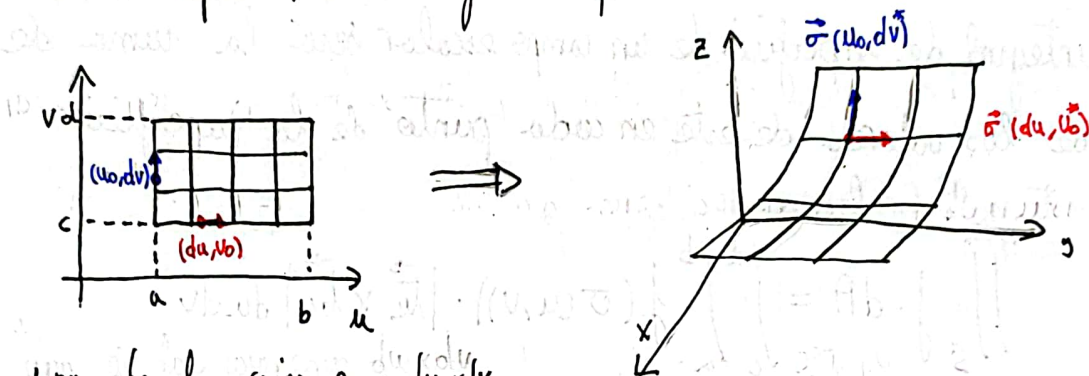
Se le suele llamar circulación del campo vectorial.

Definimos una superficie paramétrica como una función:

$$\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; T: \text{dominio en } \mathbb{R}^2$$

$$(u, v) \longrightarrow (f(u, v), g(u, v), h(u, v)).$$

Se puede ver la función superficie como el plegamiento de un plano en el espacio, de tal forma que:



Cada una de las cajas es en $du \times dv$

Las cajas se mantienen, pero se "pliegan" en el espacio \mathbb{R}^3

Como podemos ver la nueva superficie está definida por unas cajas, unas diferenciales de superficie ($d\vec{A}$). Estos diferenciales de superficie están enmarcados por vectores que nacen de la resta de: $\sigma(du + u_0, v_0) - \sigma(u_0, v_0)$.

Debido a esto podemos definir ambos vectores en función de los derivados parciales, ya que uno de los elementos u o v es constante:

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u}; \quad \vec{t}_v = \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v}$$

Entonces por definición de producto vectorial $\vec{t}_u \times \vec{t}_v = d\vec{A}$; ya que el módulo del producto vectorial será el área debajo de estos vectores.

Para calcular entonces el área de superficie de la nueva superficie plegada calcularemos la suma infinitesimal de cada uno de los diferenciabiles de área:

$$A(S) = \int_c^d \int_a^b |\vec{t}_u \times \vec{t}_v| du dv$$

La integral de superficie de un campo escalar será la suma de cada uno de los valores de este en cada punto de la superficie:

$$\iint_S f \cdot dA = \int_c^d \int_a^b f(\sigma(u,v)) \cdot |\vec{t}_u \times \vec{t}_v| du dv$$

La integral de superficie de un campo vectorial será la suma de los productos escalares entre el vector superficie y el mismo en cada punto de la superficie

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_c^d \int_a^b \vec{F}(\sigma(u,v)) \cdot (\vec{t}_u \times \vec{t}_v) du dv$$

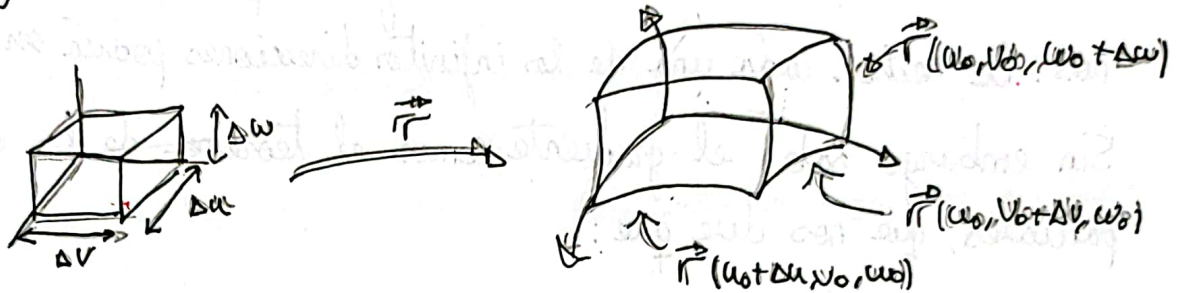
Se le suele llamar flujo del campo vectorial.

Un volumen paramétrico es:

$$\vec{r}: [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v, w) \rightarrow r(u, v, w)$$

Para calcular el elemento de volumen debemos usar el producto mixto, cuyo módulo es el volumen encerrado por los 3 vectores.



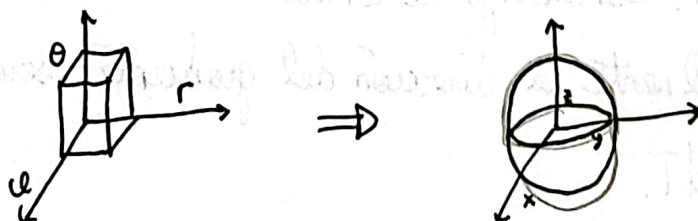
Entonces si $du, dv, dw \rightarrow 0$ tenemos que el diferencial de volumen sea (dV):

$$dV = \left| \frac{d\vec{r}}{du} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dv} \times \frac{d\vec{r}}{dw} \right) \right| du dv dw$$

Entonces para calcular el nuevo volumen

$$\int_V dV = \int_a^b du \int_c^d dv \int \underbrace{\left| \frac{d\vec{r}}{du} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dv} \times \frac{d\vec{r}}{dw} \right) \right|}_{\text{Jacobiano}} dw$$

Ejemplo: $(r, \theta, \varphi) \Rightarrow (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$



1.2. GRADIENTE:

Supongamos que tenemos una función escalar $T(x, y, z)$. Ahora nosotros queremos conocer cual es la variación de la función si nos movemos un poco en una dirección. Sin embargo, si tomáramos otra dirección de movimiento, la función podría variar más o menos. De hecho, cada una de las infinitas direcciones podría ser diferente. Para resolver este problema usaremos el teorema de los derivados parciales, que nos dice que:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz$$

Reescribiéndolo:

$$dT = \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z}\right)}_{\nabla T} \cdot \underbrace{(dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z})}_{dl}$$

$$dT = (\nabla T) \cdot (dl) = |\nabla T| \cdot |dl| \cdot \cos \theta. \quad * \text{ si lo vemos una u otra}$$

Entonces el gradiente es un vector que nos dice la dirección hacia donde cambian los derivados parciales*, y en función de la dirección que cogamos (dl) la función T podrá cambiar más o menos. Sin embargo el cambio será máximo si $\cos \theta = 1$; es decir si $\nabla T \parallel dl$. Consecuentemente la dirección del gradiente será la dirección del máximo cambio de dT .

Además el gradiente tendrá las siguientes propiedades:

1) Propiedad fundamental: $\int_a^b df = \int_a^b \nabla f \cdot d\vec{l} = f(b) - f(a)$

* $K = dt$

2) Sea $f(\vec{r}) = K^*$ un conjunto de puntos denominado superficie de nivel. El gradiente en un punto S de la superficie de nivel es perpendicular a la superficie de nivel.

3) Aunque lo veremos más tarde, los gradientes en esféricos y cilíndricos son:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \right] \Rightarrow \text{Cilíndricos}$$

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \right] \Rightarrow \text{Esféricos}$$

1.3. DIVERGENCIA

Definimos divergencia como el vector gradiente por una función vectorial (escalar). Es decir:

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}) \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)$$

La divergencia de un campo vectorial en un punto \vec{r}_0 es una medida de cuanto el vector \vec{F} se separa del punto \vec{r}_0 ; es decir, de cuanto diverge el campo vectorial de dicho punto.

Una forma de verlo es la siguiente: en un lago echas remón o agujos al agua alrededor tuyo. Si esos agujos se alejan de ti están divergiendo de ti, por lo tanto "tú" divergencia es positiva. Si se acercan por el contrario están convergiendo hacia ti, por lo que la divergencia es negativa. En función si en un punto hay divergencia positiva o negativa podemos hablar de:

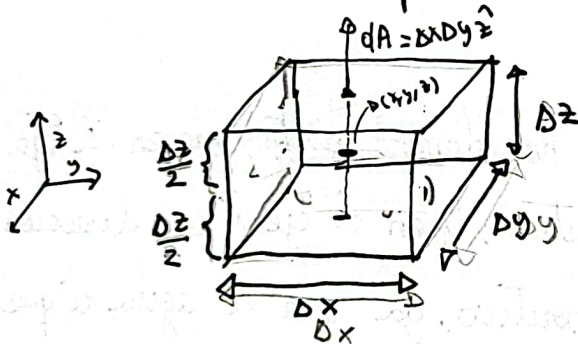
- Sumideros: si $\nabla \cdot F$ en \vec{r}_0 es negativa, los líneas de campo convergen.
- Fuente: si $\nabla \cdot F$ en \vec{r}_0 es positivo, ya que "salen" líneas de campo del punto.

Realmente la divergencia del campo vectorial \vec{F} no se define así, eso es solo su expresión matemática, la divergencia se define originalmente así:

$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i}{V_i}$$

Siendo V_i el volumen encerrado por una superficie S_i (en el punto \vec{r}). Es decir, la divergencia es el flujo saliente por la superficie por unidad de volumen en el límite V_i infinitesimal.

Si interpretamos el flujo de un campo vectorial como una medida de la cantidad de líneas de campo (y lo "poderosas" que sean estas) podemos ver que si la divergencia del punto es positiva realmente el campo, los líneas, los vectores están "escapando" del punto, es decir, divergen.



Entonces el flujo de la cara de arriba:

$$\begin{aligned} & \text{arriba} \\ & \underbrace{\Delta x \Delta y}_{dA} \cdot \vec{F}_z(x, y, z + \Delta z/2) \\ & \underbrace{\Delta x \Delta y}_{dA} \cdot F_z(x, y, z + \Delta z/2) \end{aligned}$$

El de la cara de abajo es $\underbrace{\Delta x \Delta y}_{dA} \cdot \vec{F}_z(x, y, z - \Delta z/2)$

Sumando ambos tenemos que el flujo de los caras $\Rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$.

Entonces repitiendo esto para cada una de las caras:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta V_i} \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

1.4. ROTACIONAL:

Sea $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial, se define como (matemáticamente):

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Al igual que la divergencia, el rotacional tiene un buen nombre, ya que el rotacional nos da una medida de la rotación del campo vectorial alrededor de un punto. Supongamos que nos encontramos en un lago en el que el agua se mueve. Ignoremos por lo tanto la componente F_z (ya que no asciende el agua). Entonces:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

Si entonces nos fijamos en un remolino nos damos cuenta que en el "eje x " el agua se mueve con dirección y positiva, y en el "eje y " con dirección x negativa. Entonces el rotacional será positivo, ya que el agua si que rota alrededor del centro del remolino (nuestro origen de coordenadas).

Entonces podemos imaginar el rotacional como esta medida de "rotación" del campo. Otra forma de verlo es que si ponemos unos aspas, si empieza a girar el "molino" existe el rotacional, y la dirección de la velocidad angular (regla mano derecha) es a donde apunta.

Sin embargo, como con la divergencia, no se define originalmente así. Realmente se define como:

$$(\nabla \times F) \hat{n} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{S_i} \hat{n}$$

donde S_i es una superficie que contiene el punto \vec{r}_i y C_i la línea de contorno de la superficie, y el vector \hat{n} la normal de la superficie, según la regla del sacacorchos.

Entonces el rotacional es un vector cuyo módulo es la circulación a lo largo de una trayectoria cerrada por unidad de superficie, y de dirección y sentido la normal de la superficie dada por la regla del sacacorchos.

1.5. LAPLACIANO

Se le llama laplaciano a la divergencia de un gradiente:

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f.$$

• Cilíndricos: $\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (f) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

• Esféricos: $\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{df}{d\theta}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{d^2 f}{d\theta^2}$

1.6. ESFÉRICAS:

Los coordenados esféricos están formados por 3 coordenados espaciales, (r, θ, φ) , que se relacionan con los clásicos cartesianos de la siguiente forma:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta$$

Y que:

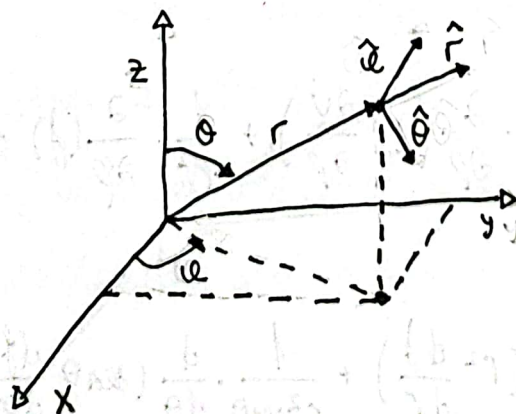
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right); \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Además tenemos los vectores $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$; que al igual que $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ nos permiten expresar cualquier vector del espacio:

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} = \left\| \frac{d\vec{r}}{dr} \right\|_{\text{normalizado}}$$

$$\hat{\theta} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} = \left\| \frac{d\hat{r}}{d\theta} \right\|$$

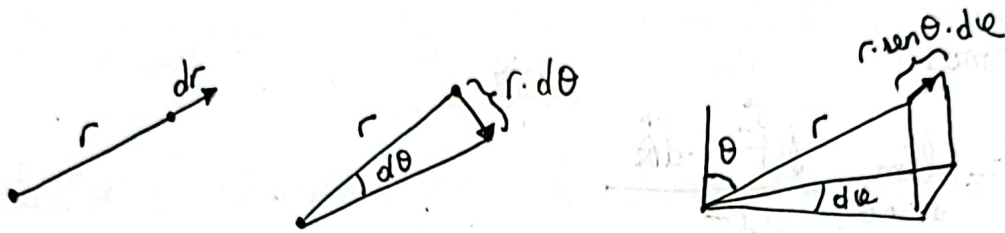
$$\hat{\varphi} = \hat{r} \times \hat{\theta} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} = \left\| \frac{d\hat{r}}{d\varphi} \right\|; \quad \vec{r} = r \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + (\dots)$$



Como podemos comprobar ni \hat{r} ni $\hat{\theta}$ ni \hat{e} son constantes: dependen del punto de referencia

Si nos desplazamos una cantidad infinitesimal por los vectores \hat{r} , $\hat{\theta}$ y \hat{e} podemos comprobar que

$$dl_r = dr, \quad dl_\theta = r d\theta, \quad dl_e = r \cdot \sin \theta d\varphi$$



Entonces el desplazamiento dl (general) será:

$$dl = dr \cdot \hat{r} + r \cdot d\theta \cdot \hat{\theta} + r \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \cdot \hat{e}$$

Para demostrar que el gradiente de esférico es diferente usaremos lo siguiente. Sabemos que, sea la función escalar $t(u, v, w) = t$; el cambio infinitesimal de t es igual a:

$$dt = \frac{\partial t}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial t}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial t}{\partial w} \cdot dw$$

Ahora podemos reescribirlo de tal forma que

$$dt = \nabla t \cdot dl = (\nabla t)_u \cdot \overbrace{du}^{f du} + (\nabla t)_v \cdot \overbrace{dv}^{g dv} + (\nabla t)_w \cdot \overbrace{dw}^{h dw}$$

$$\text{Entonces } \nabla t_u = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial t}{\partial u} \quad \nabla t_v = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial t}{\partial v} \quad \nabla t_w = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial t}{\partial w}$$

Como en coordenados esféricas hemos demostrado que $dr = dr$,
 $d\theta = r d\theta$, $d\phi = r \sin\theta d\phi$ obtenemos que:

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

Como sabemos

$$\nabla \vec{F} = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{F}(a) \cdot d\vec{A}}{d\tau}$$

Esta claro que $d\tau = f \cdot g \cdot h \, du \, dv \, dw$; y que $d\vec{A}$ depende de la cara, pero si hacemos la integral de área por la cara $w = \text{cte}$, tenemos que $d\vec{A} = f \cdot g \cdot \vec{w}$; y que la componente \vec{w} de \vec{F} es F_z . Entonces

$$\vec{F} \cdot d\vec{A} = F_z \cdot f \cdot g \cdot du \, dv;$$

Como la diferencial de volumen tiende a cero, los dos caras de w y $w+dw$ se tienen que restar (ya que para un lado es \vec{w} y otro $-\vec{w}$) tenemos que hacer la diferencia y

$$\underbrace{[F_z \cdot f \cdot g](w+dw) - [F_z \cdot f \cdot g](w)}_{\frac{\partial(F_z \cdot f \cdot g)}{\partial w} \cdot dw} = \frac{\partial(F_z \cdot f \cdot g)}{\partial w} \cdot \underbrace{du \, dv \, dw}_{d\tau}$$

Entonces hacedlo a cada uno de los componentes:

$$\nabla \cdot \vec{f} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\oint F dA}{\Delta \tau} = \frac{1}{j g h} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial u} (g h F_u) + \frac{\partial}{\partial v} (j h F_v) + \frac{\partial}{\partial w} (g j F_w) \right]$$

Entonces para los coordenados esféricos la divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \left(\frac{\partial (r^2 \sin \theta F_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r \sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial \phi} \right)$$

Para calcular el rotacional primero lo calcularemos en una superficie tal que $w = \text{cte}$. Entonces $\hat{n} = \hat{w}$. Para los coordenados \hat{u} y \hat{v} aplicaremos el mismo proceso. Como sabemos:

$$\nabla \times \vec{F} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{S_i}$$

Entonces $S_i = |d\vec{\ell}_u \times d\vec{\ell}_v| = j \cdot g \cdot du dv$.

$\oint \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ se divide en 4 integrales:

$$\int_u^{u+du} F_u \cdot j \cdot du \Big|_v - \int_{u+du}^u F_u \cdot j \cdot du \Big|_{v+dv} = - \left[\frac{\partial}{\partial v} (j \cdot F_u) \right] du dv$$

Con los integrales de v : $\int_v^{v+dv} F_v \cdot g \cdot dv \Big|_{u+du} - \int_{v+dv}^v F_v \cdot g \cdot dv \Big|_u = \left[\frac{\partial}{\partial u} (g \cdot F_v) \right] du dv$

Entonces

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{w} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial u} (g F_v) - \frac{\partial}{\partial v} (j F_u) \right] \cdot \frac{1}{j \cdot g}$$

Aplicando lo mismo con los otros coordenados:

$$\nabla \times F = \frac{1}{g \cdot h} \left[\frac{\partial}{\partial v} (h A_w) - \frac{\partial}{\partial w} (g A_v) \right] \hat{u} + \frac{1}{j \cdot h} \left[\frac{\partial}{\partial w} (j \cdot A_u) - \frac{\partial}{\partial u} (h A_w) \right] \hat{v} + \frac{1}{j \cdot g} \left[\frac{\partial}{\partial u} (g \cdot A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (j \cdot A_u) \right] \hat{w}$$

Entonces el rotacional:

$$\nabla \times F = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (r A_\theta) \right] \hat{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (A_r) - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (A_r) \right] \hat{\phi}$$

1. $\vec{\theta}$ - desplazamiento

4.7. CILÍNDRICAS:

dos coordenados cilíndricos están formados por los coordenados (ρ, θ, z) , que se relacionan con los cartesianos:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z$$

Y a la vez los cartesianos con estos:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

Y los vectores $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ y \hat{z} :

$$\hat{\rho} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\rho}}{\left|\frac{d\vec{r}}{d\rho}\right|}$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} = -\frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right|}$$

$$\hat{z} = \hat{z}$$

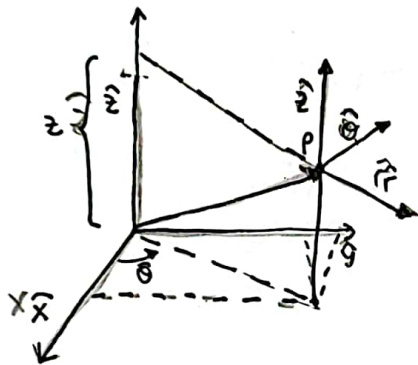
Usando los mismos procedimientos que en esféricos podemos calcular la divergencia, gradiente y rotacional.

$$d\vec{\rho} = d\rho \hat{\rho} \quad ; \quad d\vec{\theta} = \rho \cdot d\theta \hat{\theta} \quad ; \quad d\vec{z} = dz \hat{z}$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla \cdot T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_{\rho}) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (F_{\theta}) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\rho F_z)$$

$$\nabla \cdot T = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_{\theta}) \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial}{\partial z} (A_r) - \frac{\partial}{\partial r} (A_z) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (A_{\rho}) \right] \hat{z}$$



$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \hat{\rho} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\hat{\rho} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta$$

$$\hat{z} = \hat{z}$$

el vector cambio de coordenadas en un sistema de coordenadas cartesianas
 donde $\hat{z} = \hat{z}$ y $\hat{\theta} = \hat{\theta}$

$$\hat{z} = \hat{z} \quad ; \quad \hat{\theta} = \hat{\theta} \quad ; \quad \hat{\rho} = \hat{\rho}$$

1.8. TEOREMAS DE GAUSS Y STOKES

dos teoremas fundamentales de Gauss y Stokes, son teoremas fundamentales en el cálculo vectorial que relacionan diversos partes del cálculo. Primero los enunciaremos y luego veremos su interpretación geométrica:

$$\text{Th. de Gauss: } \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$$
$$\text{Th. de Stokes: } \int_S (\nabla \times \vec{F}) dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Tal y como definimos rotacional y divergencia de un punto esta definición tiene mucho sentido. Sin embargo, ¿cómo sabemos que se puede aplicar para un volumen o superficie genérico? Pues geométicamente:

- Gauss: si dividimos un volumen en infinitos dV , sabemos que para esos infinitos dV el teorema se cumple (por definición). Si ahora cogemos dos pedacitos nos damos cuenta que el área que comparten tiene el mismo valor de \vec{F} pero diferente dirección de $d\vec{A}$, por lo que al sumarlos se anulan. Por consecuencia la suma de todos los diferenciables de volumen anula los flujos interiores (uno a uno) y solo quedará el de la superficie exterior:



- Stokes: lo mismo ocurre con los integrales de línea en los infinitos diferenciales de superficie, que se anulan y solo quedan los de fuera.

Por consecuencia tenemos dos propiedades del th. de Stokes:

1) No depende de la superficie particular, si la integral de línea es la misma.

2) La integral $\oint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$ si S es cerrada, ya que los dos integrales de línea de signo opuesto se anulan.

1.9. DELTA DE DIRAC

Consideremos la función - vector:

$$\vec{v} = \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

Sobre cualquier punto, el vector \vec{v} tiene una dirección que "sale" del centro, es decir, diverge de ese punto. Sin embargo si calculamos su divergencia nos da 0:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

Sin embargo si calculamos el flujo en una esfera de radio R centrada en el origen tenemos que:

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_S \left(\frac{1}{R^2} \hat{r} \right) \cdot (R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}) = 4\pi$$

Esto choca directamente con el teorema de Gauss, ya que

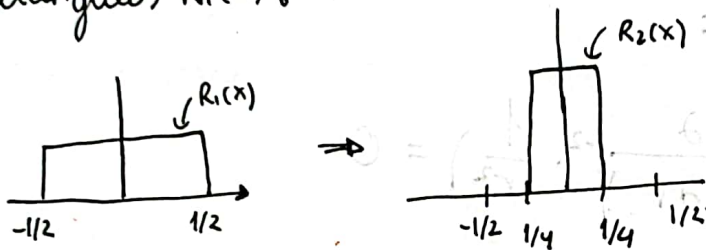
$$\int_V \nabla \cdot \vec{v} \, dV \neq \int_S \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

El problema es el punto $r=0$, ya que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ en todos los puntos menos en el origen. Como sabemos $\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{A} = 4\pi$, por lo que $\int_V \nabla \cdot \vec{v} \, dV = 4\pi$ para cualquier esfera centrada en el $(0,0)$, da igual lo pequeña que sea. Por lo cual el valor de 4π , la contribución a la divergencia tiene que ser dado por el punto $(0,0)$.

Para resolver este problema usaremos la función delta de Dirac.
 Básicamente la función delta $\delta(x)$ es una función definida tal que:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{tal que} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Sin embargo como $\delta(0) = \infty$ realmente no es una función, ni no más bien una distribución, o incluso el límite de una sucesión de funciones, como rectángulos $R_n(x)$:



Si tenemos una función $f(x)$ continua, si la multiplicamos por la función delta de Dirac, como valdrá 0 en todos lados menos $x=0$, sea el valor de f que sea podemos escribir

$$f(x) \delta(x) = f(0) \cdot \delta(x); \quad \text{ya que si } x \neq 0 \text{ ambos lados } 0 \text{ y si } x=0 \text{ tmb.}$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = f(0)$$

Evidentemente podemos cambiar el punto $x_0 = 0$ a $x_0 = a$ solo haciendo un cambio de variable:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a \\ \infty & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{con} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1$$

En tres dimensiones evidentemente se puede generalizar la función delta de Dirac, tal que:

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\mathbf{r}) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = 1$$

Y generalizando:

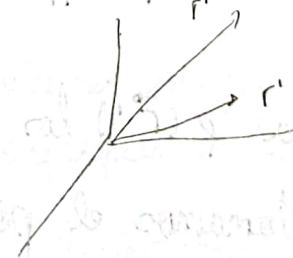
$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{a}) d\tau = f(\mathbf{a})$$

Y como en cualquier punto de \mathbb{R}^3 la divergencia es 0 menos en el punto $\vec{r} = \vec{0}$; entonces podemos asumir que:

$$\boxed{\nabla \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \cdot \delta^3(\mathbf{r})}$$

O de manera general

$$\boxed{\nabla \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$



1.10. TEOREMA DE HELMHOLTZ

El teorema de Helmholtz nos dice que si la divergencia $D(r)$ y el rotacional $C(r)$ de una función vectorial $F(r)$ están definidos, y ambos tienden a 0 más rápido que $1/r^2$ cuando $r \rightarrow \infty$, entonces $F(r) \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$ y F está definido de manera única por:

$$F = -\nabla U + \nabla \times \vec{W}$$

Además estos estarán definidos como:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \rho(\vec{r}') = \nabla \cdot \vec{F} \text{ (función escalar)}$$

$$\vec{W}(r) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{C}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \nabla \times \vec{F} = \vec{C}(r) \text{ (función vectorial)}$$

llamamos a $\rho(\vec{r}')$ los fuentes escalares y a $\vec{C}(\vec{r}')$ los vectoriales.

A U lo llamamos el potencial escalar y a W el vectorial.

2. ELECTROSTÁTICA

2.1. CONCEPTO DE CARGA ELÉCTRICA

Para explicar las acciones mutuas entre partículas es necesario considerar las siguientes propiedades fundamentales:

- Existen cargas positivas y negativas
- La carga es aditiva. dos cargas se suman teniendo en cuenta su signo: los positivos compensan el efecto de los negativos.
- La carga se conserva:
 - Generalmente: la carga de todo el universo es constante
 - Localmente: la carga total de un volumen solo puede variar si entran o salen cargas de la superficie que lo limita.
- La carga de un cuerpo esta cuantizada. Cualquier carga es multiplo entero de la carga del electron.

Usamos las unidades definidas por el S.I. para describir matematicamente los problemas. Para describir el electromagnetismo definimos:

- La carga elemental e^- como $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

De esta forma podemos definir Amperio como la corriente eléctrica creada por el flujo de $(1,60217634 \cdot 10^{-19})^{-1}$ cargas elementales por segundo.

- El segundo se define a partir de las pulsaciones de radiación correspondiente a la transición del estado fundamental del cesio.
- Ahora por lo tanto el ϵ_0 y μ_0 pasan a ser experimentales

$$\epsilon_0 = 8,8541878128 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi [1 + 0,068 \cdot 10^{-10}] 10^{-7} N \cdot A^{-2}$$

- c se define como $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ y es $299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2.2. LEY DE COULOMB

En general a lo largo del tema consideraremos que los cargos son estacionarios (no se mueven, están quietas). Por eso llamamos a este tema electroestático.

La ley de Coulomb es la ley experimental básica, que nos dice que la fuerza que ejerce la carga q (la que llamamos "carga fuente" ya que es la que genera nuestro campo) sobre la carga Q ("carga de prueba" ya que es la que se mueve bajo el efecto de q y su campo) está dada por

$$\vec{F}_{q \rightarrow Q} = F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} \hat{r} \quad ; \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Siendo \vec{r} el vector $(\vec{r}^Q - \vec{r}^q) = \vec{r}$; dado por \vec{r}^Q (posición de Q) y \vec{r}^q (posición que q).

La ley de Coulomb es la ley básica electroestática. El resto son consideraciones.

Aunque solo consideramos esa fuerza, la generando una fuerza tal que:

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = k \cdot \frac{q \cdot Q}{(\vec{r}^Q - \vec{r}^q)^2} (\vec{r}^Q - \vec{r}^q) = -k \frac{q \cdot Q}{r^2} (-\hat{r}) = -\vec{F}_{q \rightarrow Q}$$

Recordamos que:

• Si $q \cdot Q < 0$; entonces la fuerza será negativa y por lo tanto contraria a \hat{r} (en sentido) y atractiva

• Si $q \cdot Q > 0$; entonces $F > 0$ y bre q del mismo sentido que \hat{r} y por lo tanto repulsiva.

2.3. CAMPO ELÉCTRICO:

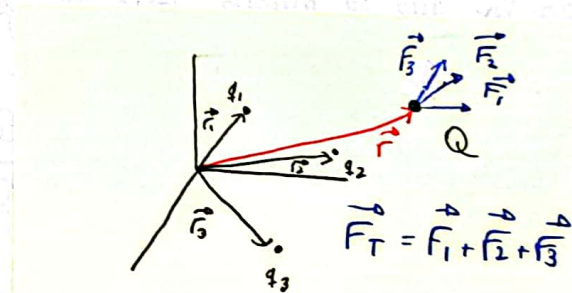
Como sabemos la fuerza neta que actúa sobre una partícula es la suma de los fuerzas. Este es el principio de superposición. Entonces si tenemos varios cargos en el espacio que generan una fuerza en la partícula Q :

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = k \cdot \left(\frac{Q \cdot q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{Q \cdot q_2}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots \right) \Rightarrow$$

$$\vec{F}_T = k \cdot Q \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} \hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2} \hat{r}_2 + \dots \right) = Q \cdot \vec{E}(r)$$

si definimos $\vec{E}(r)$ como:

$$\vec{E}(r) = k \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$



Es decir el campo es la fuerza que ejerce por unidad de carga. Más allá de que sea una "fuerza por unidad de carga" podemos definir incluso la existencia de un campo eléctrico \vec{E} en un punto \vec{r} incluso si no hay una carga Q en ese punto, ya que \vec{E} realmente no tiene dependencia de Q . En ese caso definiremos a \vec{E} como la fuerza por unidad de carga que se ejercerá allí si pusiéramos una partícula cargada en ese punto.

Otra pregunta que nos podríamos hacer es porque escribimos E_{cm} , la respuesta es bien sencilla: el campo eléctrico solo depende de la posición de Q (o del punto P si "no hay carga"), ya que los r_i son fijos (estamos en electroestática) al igual que los cargos q_i .

2.4. DISTRIBUCIÓN DE CARGA

Muchas veces las cargas no están definidas en puntos concretos del espacio (cargas puntuales) si no que están distribuidos en el espacio de manera continua (como la masa). En ese caso:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \hat{r} dq.$$

Si la distribución de carga es lineal, superficial o volumétrica puede variar la definición de dq . Entonces siendo ρ_l la densidad de carga lineal, ρ_s la superficial y ρ_v la volumétrica:

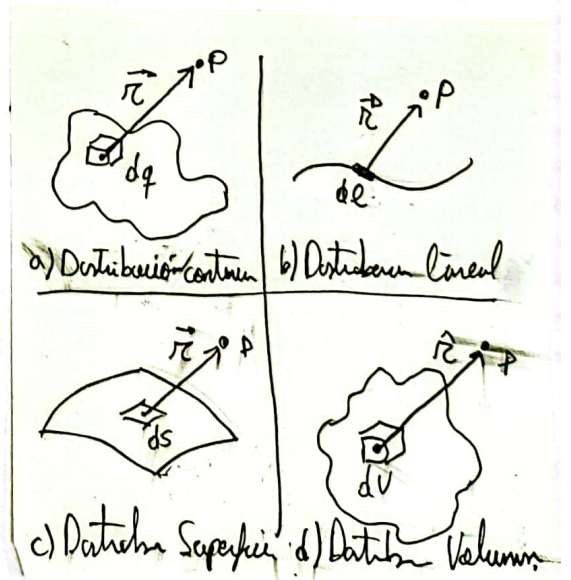
$$dq = \rho_l \cdot dl = \rho_s \cdot dS = \rho_v \cdot dV.$$

Recordemos que esta densidad puede depender de la posición del punto (ya que puede que sea, por ejemplo, más densa en la superficie de una esfera, y cuanto más te acerques al centro menos densa sea la carga). Entonces:

• lineal: $E(r) = k \cdot \int \frac{\rho_l(r')}{r^2} \hat{r} dl$

• Superficial: $E(r) = k \cdot \int \frac{\rho_s(r')}{r^2} \hat{r} dS$

• Volumétrica: $E(r) = k \cdot \int \frac{\rho_v(r')}{r^2} \hat{r} dV$



2.5. LEY DE GAUSS Y DIVERGENCIA

La conocida ley de Gauss se puede deducir de dos formas, la que demuestra que podemos medir la intensidad de un campo eléctrico en función del flujo sobre una superficie cerrada y la carga encerrada en esa superficie o la que relaciona la divergencia de un campo eléctrico en un punto con la densidad en el mismo.

Como sabemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \cdot \int \frac{\rho_V(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = k \cdot \int (\rho_V(\vec{r}') \cdot \nabla \cdot \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)) dV'$$

↳ Solo actúa sobre $(\vec{r} - \vec{r}') = \vec{r}$

Como sabemos la divergencia de $\left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$ es la función delta de Dirac (1.9):

$$\nabla \cdot \vec{E} = k \cdot \int \rho_V(\vec{r}') \cdot 4\pi \cdot \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') dV'$$

Calculas en el volumen \mathbb{R}^3
 y como el único valor para el que $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \infty$
 es $\vec{r} - \vec{r}' = 0$ entonces $\vec{r}' = \vec{r}$ entonces

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}} \Rightarrow \text{ley de Gauss diferencial}$$

Ahora aplicando el teorema de la divergencia:

$$\int \frac{1}{\epsilon_0} \rho_v(r) dV = \int \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}^* \Rightarrow$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int \frac{1}{\epsilon_0} \rho_v(r) dV \Rightarrow \boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{encerrad}}{\epsilon_0}}$$

Esta es la ley de Gauss clásica.

de otra forma de demostrarlo sería usando que el flujo de una superficie es la suma de muchos flujos en mini-superficies, y que estos flujos si los calculamos en coordenadas esféricas tenemos que:

$$\oint E dA = \oint \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} \hat{r}\right) \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} q.$$

Por lo que

$$\oint E dA = \sum_{i=1}^n \oint_i E dA = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\epsilon_0} q_i = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Además tiene mucho sentido físico porque una carga encerrada genera un campo hacia fuera, divergente del punto, por lo tanto la cantidad y "poder" de las líneas de campo que emanan de dicho punto deberíamos indicarnos la cantidad de carga: a más carga más flujo (relación equivalente).

* Aquí calculamos la suma de las divergencias en todos los puntos infinitesimales, en todo el volumen, por lo tanto aunque diferencialmente hablamos de la densidad en un punto, aquí cogemos todos los "densidades" de los puntos en un volumen, obteniendo obviamente la carga.

2.6. ROTACIONAL

Para calcular el rotacional de el campo eléctrico usaremos el teorema de Stokes, de tal modo que primero calcularemos la integral de línea. Para resolverlo estudiaremos el caso más simple: una carga en el origen.

$$\vec{E} = k \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad ; \quad d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi}$$

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b k \cdot \frac{q}{r^2} dr = k \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

En el caso de que estemos ante una integral de línea cerrada (como en Stokes) tendremos que $r_a = r_b$ y:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = \int_A \nabla \times \vec{E} dA \rightarrow$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$x_c \cdot p(x_c)$$

2.7. POTENCIAL.

Sea \vec{E} un campo C^1 definido en \mathbb{R}^3 excepto tal vez en un número finito de puntos, las siguientes condiciones sobre \vec{E} son equivalentes:

(1) Para cualquier curva orientable, cerrada y simple $\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$

(2) Para dos curvas orientadas simples cualquiera C_1 y C_2 que tengan los mismos extremos:

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

(3) \vec{E} es el gradiente de alguna función escalar ϕ o V , es decir:

$$\vec{E} = -\nabla \phi = -\nabla V$$

Y aquellos puntos donde \vec{E} no está definido V tampoco.

(4) El rotacional de \vec{E} es 0:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Un campo que cumpla los 4 condiciones (ahora demostraremos que cumpliendo 1 cumple los 4) se llama campo conservativo. Demostraremos:

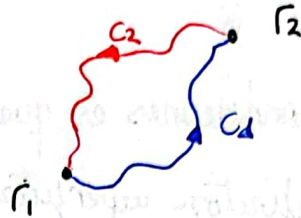
$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$$

* diferenciable

• (1) \rightarrow (2) Tenemos que $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Entonces:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1, c_1}^{r_2, c_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{r_2, c_2}^{r_1, c_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_{r_1, c_1}^{r_2, c_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{r_1, c_2}^{r_2, c_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{r_1, c_1}^{r_2, c_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1, c_2}^{r_2, c_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



• (2) \rightarrow (3) Sea \vec{r}_{ref} un punto cualquiera no singular, defino

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_{ref}) - \int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{con} \quad V(\vec{r}_{ref}) = cte.$$

y como la integral no depende del camino:

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_{r_1}^{r_{ref}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{r_{ref}}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_{ref}}^{r_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{r_{ref}}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \\ &= V(r_1) - V(r_{ref}) - V(r_2) + V(r_{ref}) = V(r_1) - V(r_2) \end{aligned}$$

y como el th. fundamental del gradiente $V(r_2) - V(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \nabla V \cdot d\vec{l}$:

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{r_1}^{r_2} \nabla V \cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

• (3) \Rightarrow (4)

$$\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = \nabla \times (-\nabla V) \stackrel{\text{trivial}}{=} 0$$

• (4) \Rightarrow (1)

Una de las condiciones es que los puntos singulares deben ser finitos, ya que entonces en una superficie cerrada C puedo elegir un camino sin puntos singulares y por lo tanto:

$$0 = \int_C \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Aunque la mayoría de los enunciados y relaciones la más interesante que hemos introducido aquí es el (3), la definición de una función escalar potencial cuyo gradiente es el campo eléctrico.

llamamos superficie equipotencial aquella superficie donde el potencial es constante:

$$V(x, y, z) = V = K, \quad K = \text{cte}$$

Para definir el potencial en un punto tenemos que usar un punto de referencia, el cual suele ser el infinito ya que el potencial del infinito, en el campo eléctrico, es 0.

dos potenciales siguen el principio de superposición: $V_T = V_1 + V_2 + \dots$

2.8. ECUACION DE LAPLACE Y POISSON

Como podemos escribir $E = -\nabla \cdot V$ y sabemos que $E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Entonces podemos deducir que:

$$\nabla^2 \cdot V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Esta es la conocida como Ecuaciones de Poisson. En las regiones sin carga ($\rho = 0$) esta ecuación se reduce a la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \cdot V = 0$$

Lo más brillante de esta ecuación es que permite calcular el potencial solo con una ecuación (Poisson), mientras que para calcular y determinar el campo eléctrico necesitamos dos ecuaciones:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad ; \quad \nabla \times \vec{E} = 0.$$

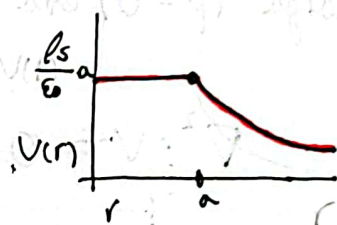
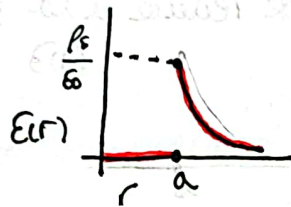
2.9. CONDICIONES DE FRONTERA EN LAS SUPERFICIES DE DISCONTINUIDAD:

Supongamos que tenemos una situación en la cual hay dos tipos de "materia" o "propiedades electromagnéticas". Por ejemplo:



$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r} & r > a \\ \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \cdot a & r < a \end{cases}$$

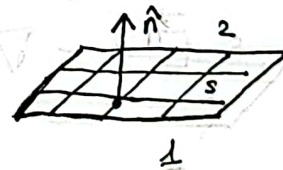


Existe una discontinuidad en $r=a$ para $E(r)$. Ahora bien, ¿Por qué existe esta discontinuidad? ¿Qué es lo que la causa?

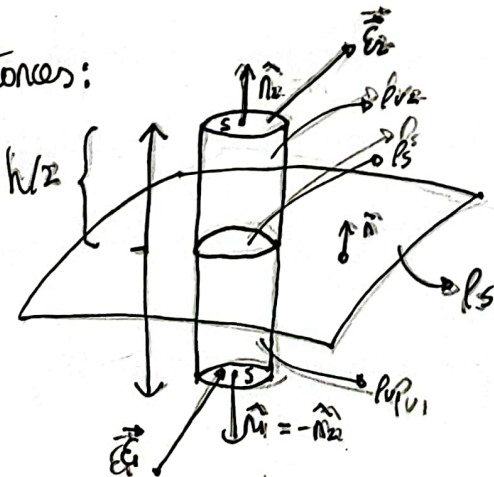
En primer lugar definiremos normal a la superficie S :

En el ejemplo anterior:

- 1 $\rightarrow r < a$ $\hat{n} = \hat{r}$
- 2 $\rightarrow r > a$



Entonces:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E}_2 \cdot S \cdot \hat{n}_2 + \vec{E}_1 \cdot S \cdot \hat{n}_1 + [\dots] \quad \rightarrow \text{caras laterales}$$

$$\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \rho_s \cdot S + \rho_{v2} \cdot h/2 \cdot S + \rho_{v1} \cdot h/2 \cdot S$$

Si $h \rightarrow 0$; tenemos que los conos laterales desaparecen y que los cargos de "densidad de volumen" encerrados. Entonces

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow S \frac{\rho_s}{\epsilon_0} = \epsilon_2 \cdot \hat{n} \cdot S + \epsilon_1 \cdot (-\hat{n}) \cdot S \Rightarrow \boxed{\frac{\rho_s}{\epsilon_0} = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \hat{n}}$$

Es decir existe una discontinuidad en los componentes normales de \vec{E} unicamente si existe una carga superficial sobre la superficie de separación. Otra forma de decirlo es que si no hay una carga superficial E es continuo. Podemos reescribir lo anterior como:

$$\boxed{\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{n} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1}$$

Hablando de potencial:

$$\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{n} = \left(\frac{\partial V}{\partial n} \hat{n} + (\dots) \right) \Big|_1$$

$$\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{n} = \nabla \cdot V_1 - \nabla \cdot V_2$$

O lo que es lo mismo

$$\frac{\rho_s}{\epsilon_0} = \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_1 - \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_2$$

Y entonces:

$$\frac{\partial V}{\partial n} \Big|_1 = \nabla V_1 \cdot \hat{n} \rightarrow \boxed{\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{n}}$$

Esto denota la velocidad de cambio en la dirección perpendicular a la super

2.10 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ELECTROESTÁTICO EN FUNCIÓN DE V :

Como sabemos la ecuación de Poisson y Laplace (2.8) son:

Poisson: $\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$; Laplace: $\nabla^2 V = 0$

Entonces tenemos que si $\nabla^2 V = 0$:

• Cartesianos: si $V = V(z)$, $\nabla^2 V = 0 \rightarrow \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{dV}{dz} = A \quad \Rightarrow \quad V = Az + B \quad \text{cte}$$

• Cilíndricos: si $V = V(\rho)$, $\nabla^2 V = 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0 \Rightarrow \rho \frac{dV}{d\rho} = \text{cte} \quad V = A \cdot \ln \rho + B$$

• Esféricos: si $V = V(r)$, $\nabla^2 V = 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{dV}{dr} = \text{cte} \quad V = \frac{A}{r} + B$$

$$\hat{A} \cdot \nabla V = \frac{\nabla V}{\rho_0}$$

2.11. PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE POISSON Y LAPLACE:

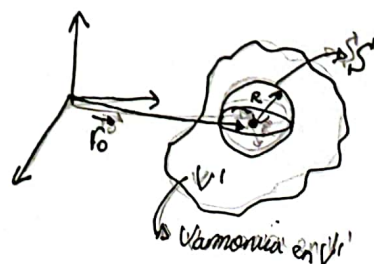
Tenemos que los ec. de Poisson y Laplace cumplen:

- Toda combinación lineal de soluciones de Laplace es solución de Laplace.
- Toda combinación lineal de soluciones de la ec. de Poisson y Laplace es solución de la ec. de Poisson:

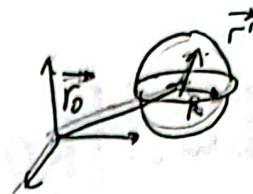
Función armónica: decimos que una función escalar es armónica cuando en un volumen V verifica la ec. de Laplace en ese volumen ($\nabla^2 V = 0$).

Teorema del valor medio: el valor $V(\vec{r}_0)$ de una función armónica en un punto \vec{r}_0 coincide con el valor medio de V en la superficie esférica de centro \vec{r}_0 interior a un dominio del campo en el que $\nabla^2 V = 0$.

$$V(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{S'} V dS$$



Demostración:



$$V(\vec{r}_0) = \frac{1}{S} \iint_S V(\vec{r}_0 + R\hat{r}) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

→ The Gauss Gauss

$$0 = \int_{V'} \nabla^2 V \, dV = \oint_{S'} \nabla \cdot V \cdot d\vec{S} = \oint \frac{\partial V}{\partial r'} R^2 \, d\Omega =$$

$$R^2 \oint \frac{\partial V}{\partial r'} \, d\Omega = 0 \Rightarrow \oint \frac{\partial V}{\partial r'} \, d\Omega = 0$$

Entonces si evaluamos el flujo en cada polo entre r_0 y $r_0 + R$:

$$\int_0^R dr' \int_S \frac{\partial V}{\partial r'} \, d\Omega = 0 = \int_S \int_0^R \frac{\partial V}{\partial r'} \, d\Omega \, dr' = \int_S [V(R, \theta', \phi') - V(r_0, \theta', \phi')] \, d\Omega$$

$$\Rightarrow \int_S d\Omega [V(R, \theta', \phi') - V(r_0, \theta', \phi')] = 0 \Rightarrow$$

$$\oint V(R, \theta', \phi') \, d\Omega = 4\pi V(r_0) \Rightarrow$$

$$V(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint V(R, \theta', \phi') R^2 \, d\Omega$$



- Principio del máximo: sea V una función armónica en un volumen V' , no puede tener ni máximos ni mínimos en V' . Entonces el máximo tiene que estar en la frontera.

Demostración:

Sea $V(\vec{r}_0)$ un máximo. Entonces $\exists B(\epsilon, \vec{r}_0) \in V'$ tal que todos los elementos cumplen condición de máximo. Así:

$$\oint_{S(B(\epsilon, \vec{r}_0))} V(\vec{r}) dS < \oint V(\vec{r}_0) dS = V(\vec{r}_0) \oint dS = 4\pi\epsilon^2 V(\vec{r}_0)$$

Entonces:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \oint_{S} V(\vec{r}) dS < V(\vec{r}_0)$$

Y esto está en contradicción con el thm del valor medio, ya que si es máximo tiene que haber una superficie que sea también máxima, pero el valor medio de cada superficie tiene que ser igual al valor de $V(\vec{r}_0)$. Consecuentemente no se puede dar dicha posibilidad.

Se demuestra de forma analógica para el mínimo.

- Teorema: si V' es un recinto que admite otra frontera S . Si V es armónico ($\nabla^2 V = 0$) en V' y $V|_S = 0$ entonces $V = 0$ en V' . Si $\nabla^2 V = 0$ y $V|_S = K$ (cte) entonces $V = K$ en V' .

Demostración: viene del principio del máximo. Si los máximos y mínimos se alcanzan en el contorno de V' , entonces el potencial en el interior está acotado superior e inferiormente por el valor máximo del contorno. Si V en el contorno es igual a K en todas las partes $K \leq V(V') \leq K$, entonces $V(V') = K$.

- Teorema: el potencial eléctrico no puede tener máximos ni mínimos a no ser un punto donde exista una carga positiva o negativa.

Demostración: es evidente cuando sabemos que $\nabla^2 V$ en \vec{r}_0 (habiendo una carga en \vec{r}_0) es $4\pi\epsilon_0 q(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)$. Como en el resto de los puntos si es armónico el potencial ($\nabla^2 V = 0$) entonces el máximo/mínimo tiene que estar en el punto donde la ec. de Laplace no se verifica.

- Teorema de Earnshaw: una carga puntual en presencia de un campo electrostático no puede mantenerse en equilibrio estable cuando solamente está sometido a fuerzas electrostáticas a menos que este situado en un punto opuesto por otras cargas.

Demostración: para que una carga esté en eq. estable tiene que encontrarse en un punto donde V sea máx. (si $q < 0$) o V sea mín. (si $q > 0$), ya que de esta forma la E_p será mínima (que es realmente donde estaría en eq). Entonces como los máximos y mínimos de potencial están donde están las cargas, no puede estar en equilibrio a menos que se le apliquen fuerzas no electrostáticas.

• Teoremas de la unicidad: surge la cuestión de cuáles son las condiciones de frontera para la ec. de Poisson o de Laplace al fin de que resulte, en el interior de la región limitada una solución única y buen comportamiento da especificación de un potencial sobre una superficie cerrada define un problema del potencial único. Esta situación se denomina problema de potencial único. Este problema se conoce como problema de Dirichlet. La especificación del campo eléctrico en cualquier punto de la superficie también define un problema único. Este problema se conoce como condiciones de contorno de Neuman.

► 1: sea V_1 y V_2 dos funciones que verifican la ec. de Poisson en un volumen V y alcanzan los mismos valores en la superficie S del volumen (condiciones de contorno de Dirichlet) $V_1|_S = V_2|_S$, entonces $V_1 = V_2$ en V .

Sea $\eta = V_1 - V_2$; entonces $\nabla^2 \eta = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} = 0$; y como

$\eta|_S = V_1|_S - V_2|_S = 0$; $\eta = 0$ en todo V . Por lo tanto

to $V_1 = V_2$ en todo V .



► 2: si U_1 y U_2 verifican la ec. de Poisson en V y en todo punto P de la superficie S verifican los mismos condiciones de contorno de Neumann:

$$\hat{n} \cdot \nabla U_1|_S = f(\vec{r}) \quad \hat{n} \cdot \nabla U_2|_S = f(\vec{r})$$

Siendo \hat{n} un vector normal a la superficie S y $f(\vec{r})$ una función, se verifica que:

$$U_1(\vec{r}) = U_2(\vec{r}) + K \quad \text{cte.}$$

Sea $\eta = U_1 - U_2$; $\nabla^2 \eta = 0$ en V y $\hat{n} \cdot \nabla \eta|_S = 0$. Entonces

$$\nabla \cdot [\eta \cdot \nabla \eta] = \nabla \eta \cdot \nabla \eta + 2 \cdot \underbrace{\nabla^2 \eta}_{=0} = \nabla \eta \cdot \nabla \eta$$

Si integramos en V : $\int_V \nabla \cdot [\eta \cdot \nabla \eta] dV = \int_S (\eta \cdot \nabla \eta) d\vec{S} = \int_S \eta \cdot (\hat{n} \cdot \nabla \eta) dS$

$$\int_S \underbrace{\eta \cdot (\hat{n} \cdot \nabla \eta)}_0 dS = \int (\nabla \eta)^2 d\tau = 0$$

Entonces como $\int (\nabla \eta)^2 d\tau = 0 \Rightarrow \int \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right] dV$

$$\text{Entonces: } \begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \eta = K \Rightarrow U_1 = U_2 + K$$

- 3: si V_1 y V_2 son funciones que verifican en V la ec. de Poisson y en una parte (con un punto concreto llega) del contorno de V verifican que $\hat{n} \nabla V_1|_S = \hat{n} \nabla V_2|_S = f(\vec{r})$ y en otra parte $V_1|_S = V_2|_S$ (estas son las condiciones de contorno mixtas). Entonces $V_1 = V_2$ en V .

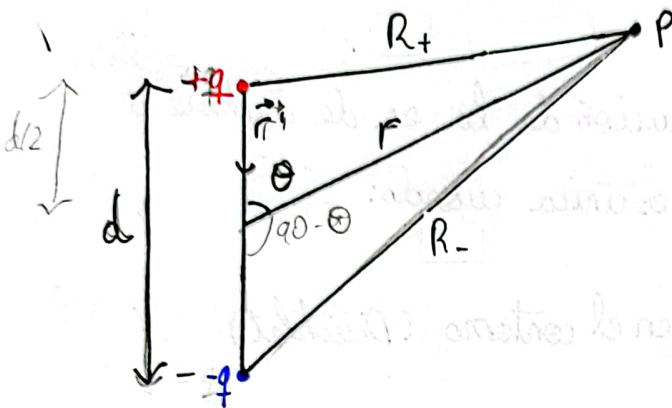
Se puede deducir aplicando las anteriores demostraciones.

Es decir, podemos afirmar que la solución de la ec. de Laplace o de Poisson dentro de un recinto S es única cuando:

- Se conoce el valor del potencial en el contorno (Dirichlet)
- Se conoce el valor de la derivada normal del potencial en el contorno (Neumann). En este caso el potencial se conoce salvo una constante aditiva. Sin embargo el campo \vec{E} es único.
- Se conoce el valor del potencial en parte del contorno y el valor de la derivada normal en el resto del contorno (mixtas).

2.12. DESARROLLO MULTIPOLAR DEL POTENCIAL:

Supongamos que tenemos dos cargas $(+q, -q)$ separados a una distancia d . ¿Cómo podríamos calcular el potencial en punto muy alejado dipolo?



- Dipolo: dos cargas opuestas $(\pm q)$ separados a una distancia d .

- Momento dipolar: sea \hat{r} el vector unitario que une $+q$ y $-q$; el momento dipolar es:

$$\vec{p} = q \cdot d \cdot \hat{r}$$

Sea r_- la distancia entre $-q$ y P ; y r_+ la distancia entre $+q$ y P . Entonces tenemos que:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{R_+} - \frac{q}{R_-} \right)$$

Si usamos la ley de los cosenos ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$):

$$R_{\pm}^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mp r d \cos \theta$$

Entonces

$$\frac{1}{R_{\pm}} = \frac{1}{r \cdot \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2} \right)^{1/2}}$$

Si $r \gg d$ entonces $\frac{d^2}{r^2} \rightarrow 0$. Por lo tanto

$$\frac{1}{R_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{d}{r} \cos \theta}}$$

Como $\frac{d}{r} \rightarrow 0$ cuando $r \gg d$, podemos hacer el cambio de variable $\frac{d}{r} = x$ y aproximar por Taylor centrado en $x=0$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha x}} \approx 1 + \frac{2\alpha}{(1+\alpha x)^{3/2}} \Big|_0 \cdot (x-0)^1 + \frac{3\alpha^2}{(1+\alpha x)^{5/2}} \Big|_0 \cdot (x-0)^2 + [\dots]$$

Cogiendo los 2 primeros términos (ya que $|x| \ll 1$) tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha x}} \approx 1 + 2\alpha \cdot x.$$

Entonces

$$\frac{1}{R_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \cdot \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$$

Y por consecuencia

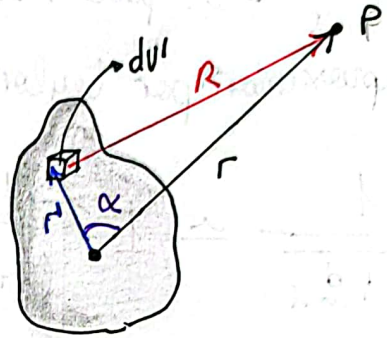
$$\left(\frac{1}{R_{+}} - \frac{1}{R_{-}} \right) = \frac{d}{r^2} \cos \theta$$

Entonces tenemos que para valores de R_{\pm} muy grandes:

$$V(r) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot d}{r^2} \cos \theta$$

Ahora supongamos que tenemos una distribución de cargas no tan concreta, de tal manera que podamos desarrollar una expansión sistemática para el potencial para cualquier distribución de cargas en el espacio:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{R} \rho(r') dV'$$



Usando la ley de los cosenos

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha = r^2 \left[1 - \frac{r'}{r} 2 \cos \alpha + \frac{r'^2}{r^2} \right]$$

Si $\epsilon = -\frac{r'}{r} 2 \cos \alpha + \frac{r'^2}{r^2}$; tenemos que:

$$R = r \sqrt{1 + \epsilon};$$

Y desarrollando

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} (1 + \epsilon)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon + \frac{3}{8} \epsilon^2 - \frac{5}{16} \epsilon^3 + \dots \right)$$

Que si sustituimos $\epsilon = \frac{r'}{r} \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \alpha \right)$ tenemos que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \cdot \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \alpha + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} \right) + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{5 \cos \alpha - 3 \cos^3 \alpha}{2} \right) + \dots \right]$$

Sorprendentemente tenemos que los coeficientes que acompañan a $\left(\frac{r'}{r} \right)^n$ son los polinomios de Legendre $P_n(\cos \alpha)$.

Es decir tenemos que:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \alpha)$$

Y por consecuencia

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} \int (r')^n P_n(\cos \alpha) \rho(r') dV'$$

Este es el resultado de la expansión multipolar en términos de $1/r$. El primer término ($n=0$) es el término monopolar, el segundo ($n=1$) es el término dipolar, el tercer término es el tetrapolar ($n=2$)...

El término monopolar es el término que domina para r muy grandes. Entonces si $Q = \int \rho(r') dV'$ tenemos que el potencial a largas distancias es:

$$V_{\text{mon}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Es exactamente lo que esperábamos. Además si solo hay una carga Q en el espacio $V_{\text{mon}}(r)$ es el potencial, ya que los otros términos desaparecen.

El término dipolar es el término que domina si la carga total es 0 (a menos que también desaparezca, momento en el que pasará a dominar el momento tetrapolar).

De todos modos el término dipolar será:

$$V_{\text{dip}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \int r' \cos(\alpha) \cdot \rho(r') dV'$$

$$\cos(\alpha) = \hat{r} \cdot \hat{r}' \Rightarrow r' \cos(\alpha) = \hat{r} \cdot \vec{r}'$$

Entonces si llamamos a \vec{p} el momento dipolar:

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(r') dV'$$

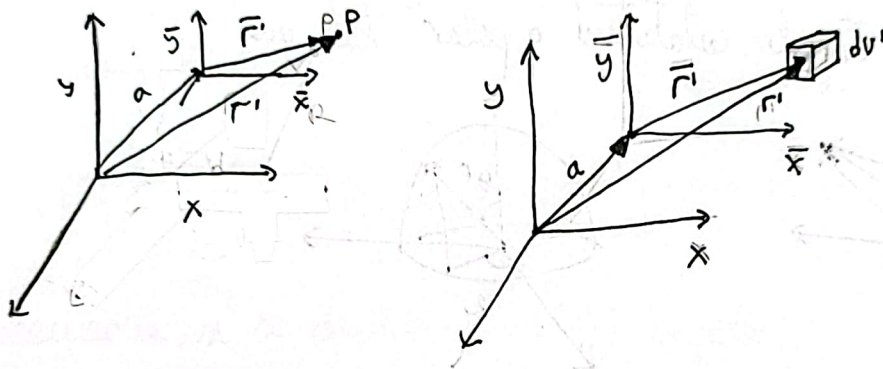
Tenemos que

$$V_{\text{dip}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

Este momento está definido según su geometría. Para un dipolo físico (como el que ya vimos) $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$, donde \vec{d} es el vector que va desde la carga negativa a la positiva. Cuanto más lejos estes del dipolo (y por lo tanto los términos multipolares tienden a 0 más rápido) la aproximación será mejor. Lo mismo ocurre si $d \rightarrow 0$. De hecho un dipolo perfecto es aquel que $d \rightarrow 0$ y $q \rightarrow \infty$

2.13. EFECTOS DE LA ELECCIÓN DEL ORIGEN:

El momento monopolar (al que llamaremos Q) es una propiedad única de la distribución de cargas. Este no cambia si alteramos el origen de coordenadas (ya que $Q = \int \rho(r') dV'$ no cambia). Sin embargo el momento dipolar sí cambia, ya que depende de los coordenados de los cargas, y por lo tanto sí depende del origen.



Entonces como $\vec{p} = \int \vec{r}' \cdot \rho(r') dV'$ en distribuciones "generales" o

$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}'_i$ para distribuciones con cargas puntuales (como $\vec{r}'_i = \vec{a} + \vec{r}'_i$):

$$\bullet \vec{p} = \int \vec{r}' \rho(r') dV' = \int (\vec{r}' - \vec{a}) \rho(r') dV' = \vec{p} - Q \cdot \vec{a}$$

$$\bullet \vec{p} = \sum \vec{r}'_i q_i = \sum (\vec{r}'_i - \vec{a}) q_i = \vec{p} - Q \cdot \vec{a}$$

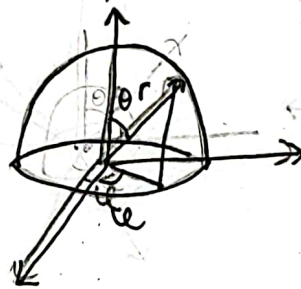
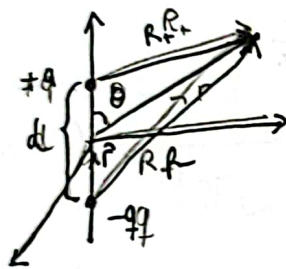
Si nos damos cuenta $Q=0$ (como en el dipolo estudiado) el momento dipolar no depende en ningún momento del origen de potencial.

2.14. CAMPO ELÉCTRICO DEL DIPOLO ELÉCTRICO:

Como sabemos

$$V_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cdot \cos\theta}{r^2}$$

Para conocer el campo tendremos que hacer el gradiente del potencial. Recordemos que dada la construcción del dipolo el ángulo θ corresponde con el ángulo colatitud o polar tal que



Entonces

$$E_r = - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

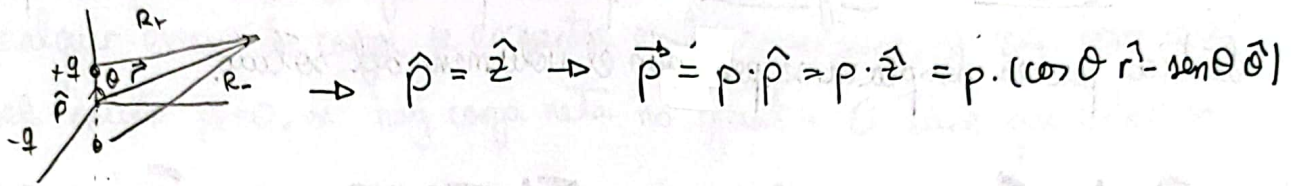
$$E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\phi = - \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

Entonces

$$E_{dip}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})$$

En el caso del dipolo eléctrica:



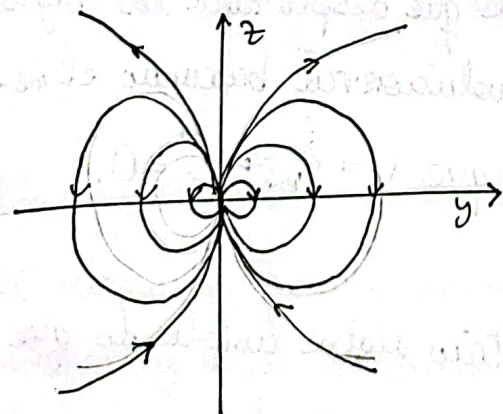
Entonces, como $\vec{r} = r \hat{r}$; y $\vec{p} \cdot \hat{r} = \cos\theta \cdot p$, tenemos que

$$3 \cdot (\vec{p} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{p} = 2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}$$

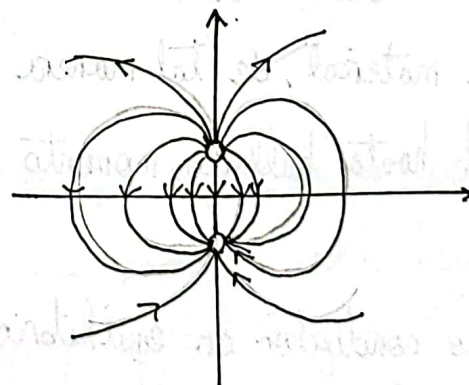
Por consecuencia, si se dispone así el dipolo:

$$E_{dip}(p, r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot (3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}) - \frac{\vec{p}}{3\epsilon_0} \delta(\vec{r})$$

Si incluimos $\vec{r} = \vec{0}$



Campo dipolo puro



Campo dipolo no puro, fónico (real)

3. CONDUCTORES

Podemos caracterizar la materia según sus propiedades eléctricas, de tal manera que si permite el movimiento de cargas libres se llama conductor y si no aislante. Una carga libre es aquella que bajo la acción de un campo eléctrico pueden desplazarse por todo el volumen del sólido.

3.1. EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO:

Consideremos un cuerpo conductor libre de fuerzas no electrostáticas. Administrémosle una cierta carga q . Si dejamos que pase el tiempo suficiente llegará un punto donde las cargas se dejan de mover, llegando al equilibrio electrostático. En este equilibrio se debe cumplir que:

$$\vec{E} = 0$$

Ya que de lo contrario existiría una fuerza que desplazaría los cargas por todo el material, de tal manera que evolucionaría buscando el menor potencial hasta hallarlo, momento en el que $V = C_{\text{máx}} \Rightarrow \vec{E} = 0$.

Entonces todo conductor en equilibrio eléctrico acaba cumpliendo que en el interior $\vec{E} = 0$.

3.2. PROPIEDADES DE LOS CONDUCTORES EN EQUILIBRIO:

Como consecuencia de que el campo eléctrico en el interior sea nulo:

- No hay densidad de carga volumétrica en el interior del conductor.

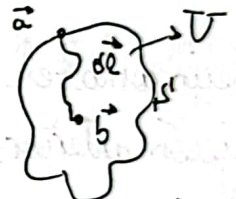
$$0 = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV = \int_V \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \, dV \Rightarrow \rho_v = 0 \text{ en } V$$

↳ para toda superficie dentro del sólido

- Cualquier exceso de carga se encuentra en la superficie, ya que como dentro del sólido $\rho_v = 0$, si hay carga neta no igual a 0 tiene que estar en la superficie

- Como dentro del sólido $\vec{E} = 0$, $V = C = \text{cte}$. Por eso decimos que un conductor es un volumen equipotencial. En la superficie también:

$$V(\vec{a}) - V(\vec{b}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow V(\vec{a}) = V(\vec{b})$$



- \vec{E} fuera del conductor es perpendicular a la superficie. Si toda la carga q se distribuye a lo largo de la superficie S tendremos que:

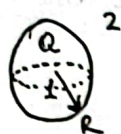
$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \cdot \hat{n} \rightarrow \text{Como } \vec{E}_1 = 0 \rightarrow \vec{E}_s = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{n}$$



- No puede haber líneas de campo que vayan de un conductor a sí mismo, ya que el campo se mueve siempre a donde haya menor potencial, y si el conductor es equipotencial ninguna línea que salga del conductor puede volver a él.

A continuación vamos a poner varios ejemplos de conductores y cálculo de \vec{E} y V :

- Ejemplo 3.2.1: conductor esférico aislado con carga Q de radio R



$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \Rightarrow \text{Aplicamos ley Gauss 2.5} \\ \vec{E}_1 = 0 \rightarrow Q_{enc} = 0; \text{ ademas es un conductor} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} V_1 = \text{Cte} = -\frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi R} \\ V_2 = \int_{-\infty}^R \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = -\frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Como } V(R) = \lim_{r \rightarrow R^-} V_1(r) = \lim_{r \rightarrow R^+} V_2(r) \rightarrow V_1 = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi R}$$

- Ejemplo 3.2.2: conductor esférico aislado con un potencial V dentro fijo. Entonces usando la ec. de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \rightarrow V = \frac{a}{r} + b, \text{ (esto en todo el espacio se cumple)}$$

- En el interior: $V = V \rightarrow a = 0, b = V$

- En el exterior: $V(r = \infty) = 0 \rightarrow b = 0$. Como en $r = R$ se tiene que cumplir que $\frac{a}{R} = V \rightarrow a = V \cdot R$. Entonces:

$$V = \frac{V \cdot R}{r}, \quad r > R. \text{ Esto implica que:}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{V \cdot R}{r^2} \text{ si } r > R \text{ (exterior)} \\ 0 \text{ si } r < R \text{ (interior)} \end{cases}$$

3.3. PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA ELECTROESTÁTICA EN PRESENCIA DE CONDUCTORES:

En la electrostática el valor/magnitud fundamental que debemos conocer en todo punto del espacio es el potencial. Una vez conocido el potencial el campo se puede calcular tal que $\vec{E} = -\nabla V$.

Para poder hallar el potencial (usando la ec. de Poisson, Laplace...) debemos imponer ciertas condiciones de frontera. Una de ellas es que en el infinito el potencial $V(\infty) = 0$. Otra de las condiciones de frontera aparecen en la superficie del conductor (o varias condiciones una por conductor). Entonces existen dos posibles condiciones impuestas:

- 1) Conocemos el potencial $V|_{S_i} = V_i$
- 2) Conocemos la carga total Q_i

En cualquiera de los dos situaciones conocemos el valor del potencial. En el primer caso nos lo dan de manera directa, en el segundo lo podemos hallar:

$$Q_i = \oint_{S_i} \rho_s \cdot dS = \oint_{S_i} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS_i = - \oint_{S_i} (\nabla V) \cdot \hat{n} \cdot dS_i = - \oint_{S_i} \epsilon_0 \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right) dS$$

Por lo tanto podemos argumentar que en un problema de contornos conductores la solución para el potencial se conoce si (además de $V(\infty) = 0$):

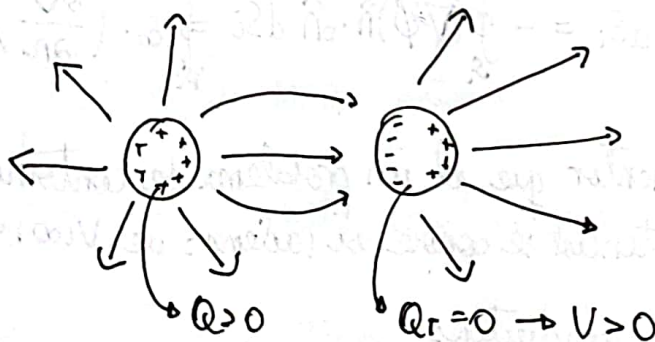
- dos potenciales para los N conductores
- dos cargas para los N conductores
- dos potenciales para n conductores y cargas para $N-n$.

3.4. DIFERENCIAS ENTRE CONDUCTORES A Q CONSTANTE Y V CONSTANTE:

- Un conductor puede tener fijado el potencial o la carga total, pero no ambas magnitudes a la vez. $* Q_T$
- Si el conductor está aislado su carga* permanecerá constante, aunque pueden redistribuirse los cargas en la superficie. El potencial puede variar.
- Si el conductor está conectado a una fuente de tensión ideal su potencial se mantiene constante. La fuente puede añadir o quitar carga para variar el potencial. Cuando conectamos un conductor a tierra decimos que su potencial se iguala a 0 (dentro del conductor).

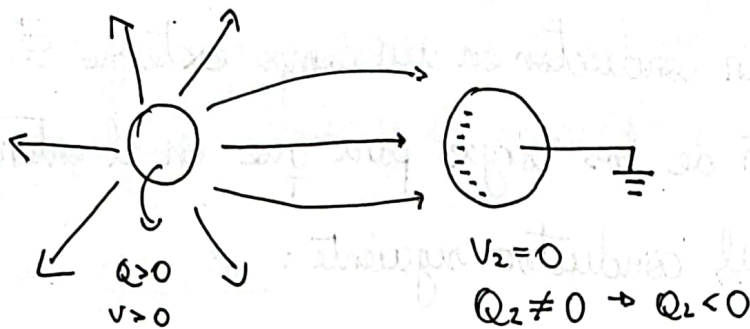
Vamos a presentar dos ejemplos relevantes. En el primero veremos que carga 0 no implica potencial 0 y potencial 0 no implica carga 0 en el segundo ejemplo.

- Ejemplo 3.4.1: a una esfera descargada se le acerca una esfera de carga positiva:



Esto ocurre por el simple hecho que es conductora y en el interior $\vec{E} = 0$.

• Ejemplo 3.4.2: a una esfera conductora conectada a tierra se le acerca una esfera de carga positiva:

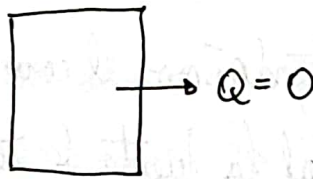


En el caso de que $Q_2 = 0$ tendríamos el caso anterior y $V \neq 0$. Por lo tanto para mantener el potencial la fuente de tensión (tierra) suministraría carga a la esfera. Además $Q_2 < 0$ para que la superficie de contorno acabe convirtiéndose $V = 0$

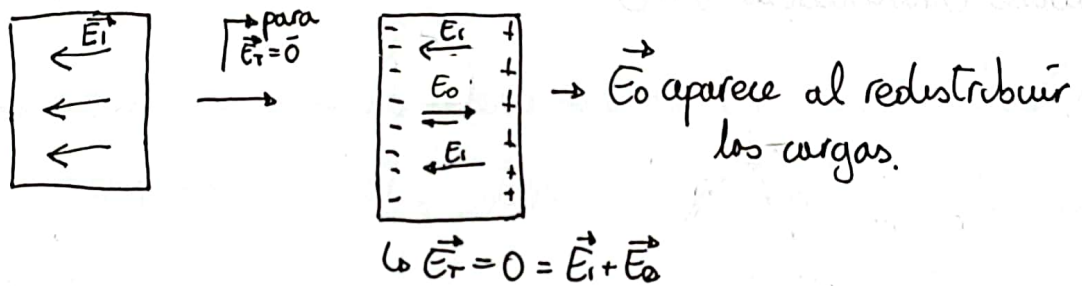


3.5. INFLUENCIA Y APANTALLAMIENTO ENTRE CONDUCTORES:

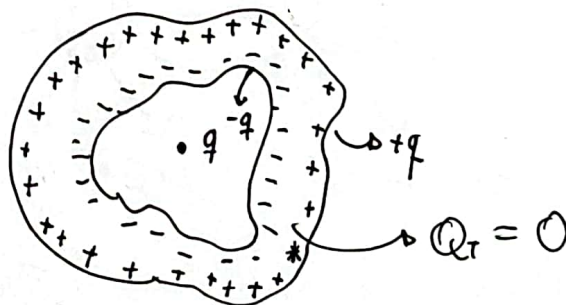
Si introducimos un conductor en un campo externo \vec{E} se produce una redistribución de las cargas para que en el interior $\vec{E} = 0$.
 Por ejemplo si al conductor siguiente:



de aplicamos un campo $\vec{E}_i = E_i(\hat{x})$



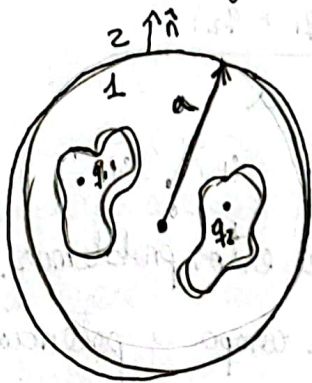
Si este campo estuviera ejercido por una carga q entonces aparecerá una fuerza de atracción entre q y el conductor. Con lo cual si colocamos una carga puntual q en un conductor con una cavidad tenemos que:



Por lo tanto podemos deducir que: "Una carga Q dentro de la cavidad puede hacer sentir la presencia a alguien que se encuentre fuera del conductor descargado por medio de la carga inducida $+Q$ que es puntual en la superficie exterior y el campo debido a esta".

Pongamos un ejemplo:

- Ejemplo 3.5.1: supongamos un conductor esférico con dos huecos interiores (de forma arbitraria) en el que colocamos dos cargas q_1 y q_2 . Entonces calcularemos el campo y potencial fuera de la superficie del conductor y veremos que son debidos a los cargos que aparecen en la superficie del conductor:



En este problema por tener simetría esférica y como en el exterior $\rho = 0$

$$V = A + \frac{B}{r} ; V(\infty) = 0 \rightarrow A = 0.$$

Ahora el problema sera hallar B . Si usamos Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} ; \vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial n} \hat{n} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} = \frac{B}{r^2} \hat{r}$$


$$\Rightarrow -\oint \nabla V \cdot d\vec{S} = +\frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0} = +\frac{B}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \rightarrow B = +\frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0}$$

$$\text{Entonces } V = +\frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0 r} ; \vec{E} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Y si estudiamos el problema en la superficie de contorno para hallar la carga superficial:


$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Big|_a = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \rightarrow \hat{n} \cdot \vec{E}_2 \Big|_a = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \rightarrow \rho_s = \frac{q_1 + q_2}{4\pi a^2}$$

Sin embargo el cálculo del potencial dentro de los huecos conlleva a resolver dos problemas independientes que tienen solución única.



A diagram showing an irregularly shaped cavity containing a point charge q_1 . An arrow points from the charge to the boundary of the cavity, which is labeled with the potential $V|_S$.

$$V|_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(q_1 + q_2)}{a}$$

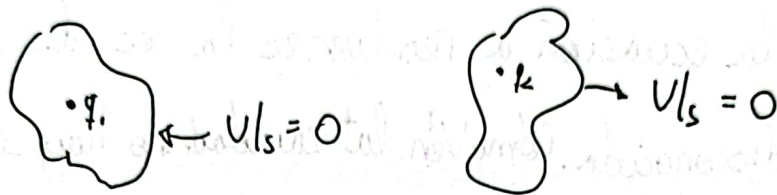


A diagram showing an irregularly shaped cavity containing a point charge q_2 . An arrow points from the charge to the boundary of the cavity, which is labeled with the potential $V|_S$.

$$V|_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(q_1 + q_2)}{a}$$

Si llamamos V_1 y V_2 a los soluciones de estos problemas. Conocer analíticamente la solución implica conocer el campo y potencial en el interior de los huecos, haciendo que aparezca en las superficies interiores una carga $-q_1$ y $-q_2$ respectivamente. Sabemos que ambos tienen solución y que es única gracias al teorema de unicidad.

- Ejemplo 3.5.2: Supongamos el mismo caso que antes solo que conectamos la esfera a tierra ($V=0$ dentro del conductor). Ahora en este caso el campo (y potencial) fuera de la esfera es trivialmente 0 ($\nabla^2 V=0$, $V(r=a)=0$, $V(r=\infty)=0$). Ahora podemos estudiar el potencial en los huecos sabiendo que

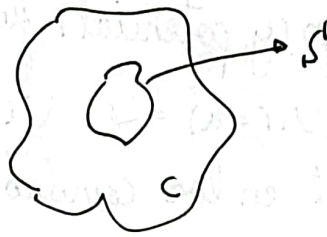


Si llamamos V_1' y V_2' a las soluciones del problema. Como el campo dentro (th. de Gauss) es el mismo que en el caso interior (la carga encerrada sigue siendo la misma) y fuera también estamos ante un problema de condiciones de contorno de Neumann. Entonces como $V = V' + cte$ tenemos que $cte = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(q_1 + q_2)}{a}$.

Esto implica que el campo generado por q_1 y $-q_1$ (superficie del conductor del hueco) y por q_2 y $-q_2$ (superficie del conductor del hueco) es nulo fuera del hueco.

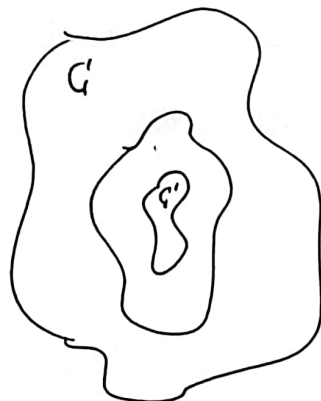


• Ejemplo 5.3.1: suponemos ahora que no tenemos carga dentro de la cavidad:



En este caso la ecuación a resolver es la ec. de Laplace $\nabla^2 V = 0$ con $V|_S = V'$ desconocida. $V = V'$ dentro de la cavidad, con lo cual $\vec{E} = 0$ dentro de la cavidad, y por lo tanto no hay carga superficial en S' . Estas conclusiones son válidas si hay un conductor C' dentro, en el hueco.

Mientras C' no tenga carga no habrá campo en la cavidad (por el principio del máximo no habrá campo dentro de C y del hueco (equipotencial). Si suponemos lo contrario llegamos a una contradicción porque aparecerán algunos líneas de campo que comborarán los cargas superficiales y C' tendrá que estar cargado (contradicción).



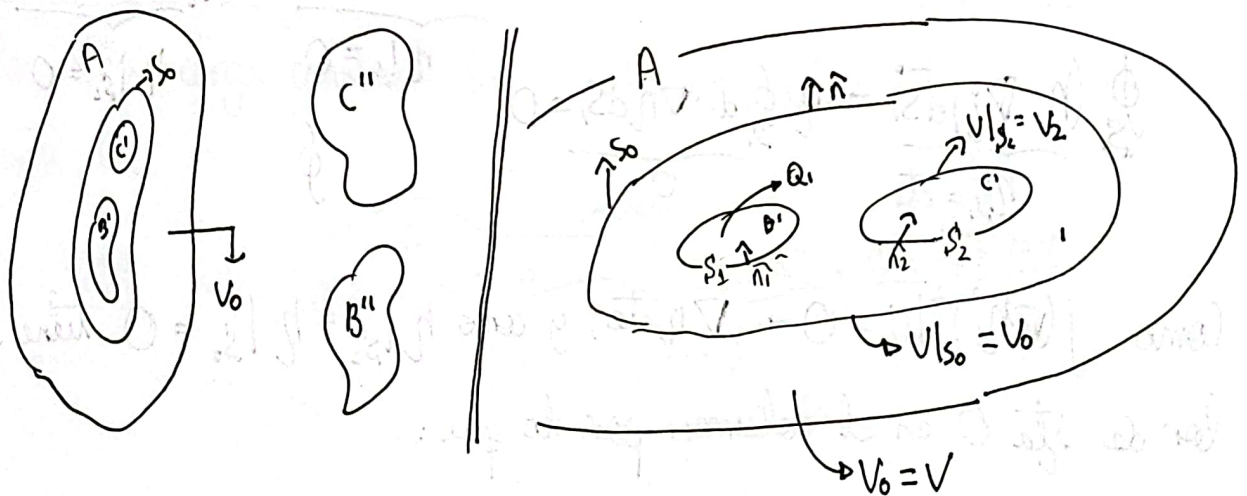
* se colocaran en Sect. y
 $Q_{enc} = 0$.

Sin importar la carga que se coloque en C' o fuera de C el interior de C' será equipotencial ($\vec{E} = 0$) y su carga total no se verá afectada. Esto se conoce como apantallamiento.

Ahora vamos a estudiar la jaula de Faraday y la jaula de Faraday imperfecta.

• Jaula de Faraday: consideremos un conductor hueco A a un potencial V_0 dado (A es nuestra jaula de Faraday)! En el interior habrá un hueco con conductores $B', C' \dots$ y en el exterior $B'', C'' \dots$

Supongamos ahora que para cada uno de los conductores interiores conocemos o bien la carga o bien el potencial, pero no tengamos ninguna información de si existen o las condiciones de los conductores exteriores. Vamos a demostrar que en este caso el potencial dentro de A viene dado de forma única:



Hagamos lo que hacemos siempre: sean η_1 y η_2 soluciones del problema del potencial

$$\eta_1|_{S_1} = \text{cte (desconocida)}, \eta_1|_{S_2} = V_2, \eta_1|_{S_0} = V_0, \epsilon_0 \oint_{S_1} \hat{n} \cdot \nabla \eta_1 dS_1 = Q_1$$

$$\eta_2|_{S_1} = \text{cte (desconocida)}, \eta_2|_{S_2} = V_2, \eta_2|_{S_0} = V_0, \epsilon_0 \oint_{S_1} \nabla \eta_2 dS_1 = Q_1$$

Ahora si consideramos $\eta = \eta_1 - \eta_2$:

$$\eta|_{S_1} = \text{cte}; \epsilon_0 \oint_{S_1} \hat{n} \cdot \nabla \eta dS_1 = 0; \eta|_{S_0} = 0; \eta|_{S_2} = 0$$

Y calculando: $\int \nabla(\eta \nabla \eta) dS = \int (\nabla \eta)^2 dV = 0 \Rightarrow \eta = 0$.

Para llegar a esto:

$$\int \nabla(\eta \nabla \eta) dV = \int \eta \nabla^2 \eta dV + \int (\nabla \eta)^2 dV$$

$$\int \nabla(\eta \nabla \eta) dV = \oint_{S_0} (\eta \nabla \eta) d\vec{S} = \underbrace{\oint_{S_0} (\eta \nabla \eta) d\vec{S}_0}_{\eta|_{S_0}=0} + \underbrace{\oint_{S_2} (\eta \nabla \eta) d\vec{S}_2}_{\eta|_{S_2}=0} +$$

$$\underbrace{\oint_{S_1} (\eta \nabla \eta) d\vec{S}_1}_{\eta|_{S_1}=\text{cte}} = \eta \underbrace{\oint_{S_1} \hat{n} \cdot \nabla \eta dS_1}_0 = 0$$

Como $\int (\nabla \eta)^2 dV = 0 \Rightarrow \eta = \text{cte}$; y como $\eta|_{S_2} = \eta|_{S_0} = 0$ el valor de $\eta = 0$ en el volumen por lo que:

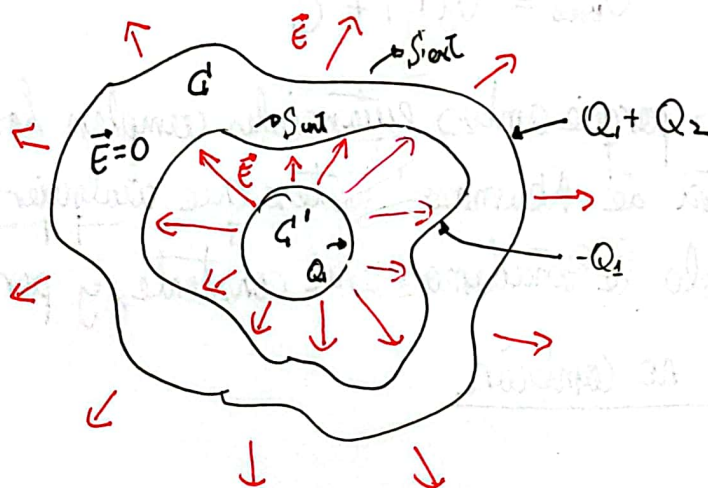
$$\eta_1 = \eta_2$$

do visto antes se puede demostrar análogamente para el caso de encontrarse en el exterior del conductor A, pudiendo determinar el potencial sin ambigüedad sin tener ninguna información de los conductores interiores.

Por lo tanto el potencial y el campo en el interior y exterior del conductor A (a $V = V_0 = \text{cte}$) es totalmente independiente de los conductores exteriores e interiores respectivamente (de su posición, carga o existencia).

Nótese que el conductor A separa el espacio en 2 regiones que son independientes desde el punto de vista eléctrico, ya que podemos desplazar, hacer aparecer o desaparecer cargas sin modificar los fenómenos existentes en la otra región.

- Jaula de Faraday Imperfecta: en este caso tendremos un conductor G a carga constante Q_2 y un condensador G' a carga constante Q_1 :



Es obvio que la carga $Q_1 + Q_2$ en S_{ext} no crea un campo en la región interior, y que $-Q_1$ en S_{int} en la exterior. También es evidente que si llamamos V_c' al potencial de C' y V_c al potencial de C está claro que $V_c < V_c'$, ya que los líneas de campo van de C' a C (suponiendo que $Q > 0$). El potencial en el interior de C (hueco) tendrá solución única y vendrá dada:

$$V(\vec{r}) \equiv \nabla^2 V = 0, \quad V_{int} = V_c, \quad V_{C'} = \text{cte (desconocida)}.$$

Si realizamos un cambio en el exterior modificará el valor de V_c ya que se modificará el valor del potencial en el exterior y por ser equipotencial en C cambiará el potencial V_c en el interior y esto no cambiará el campo en el hueco. Si el nuevo potencial fuera es $V_c + C$ entonces el nuevo potencial que verifique los condiciones del hueco será el anterior más la constante C :

$$V_{nuevo} = V(\vec{r}) + C$$

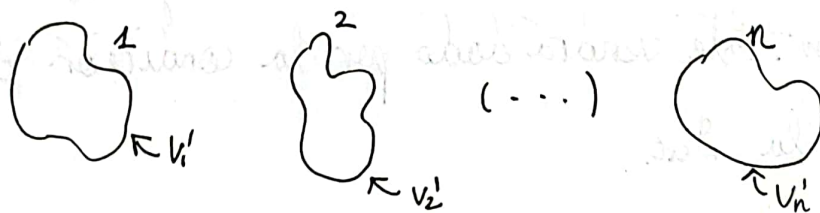
Esto lo sabemos porque ambos potenciales cumplen los mismos condiciones de frontera de Neumann. Nótese que el campo dentro no cambia ya que solo le añadimos una constante, y por lo tanto los cargas interiores no cambian.

Evidentemente el problema exterior cambia al modificar V_c (cargas en el interior)

Uno puede preguntarse: ¿Qué cambios en el interior no modifican el potencial en el exterior? Cualquier cambio que no induzca un cambio de la carga Q_{\pm} . Un cambio en la posición del conductor C' o del hueco no modificara el potencial en el exterior. Este vendrá dado por la condición de frontera $Q_1 + Q_2$ en la S_{ext} .

3.6. COEFICIENTES DE CAPACIDAD:

Supongamos un sistema de conductores situados en una región de carga $\rho = 0$. Supongamos que los conductores están a potenciales V_1, V_2, \dots, V_n con lo que tienen cargas Q_1, Q_2, \dots, Q_n . Veremos que existe una proporcionalidad entre la carga y los potenciales.



la ecuación a resolver será:

- $\nabla^2 V = 0$ en el espacio entre conductores
- $V|_{S_i} = V_i, \dots, V|_{S_n} = V_n$; en las superficies
- $V(\infty) = 0$ por convenio.

Supongamos que podemos encontrar un método con el que podemos obtener n funciones $V_i(\vec{r})$ de tal manera que cumplen:

- $\nabla^2 V_i = 0$ en el espacio entre conductores
- $V_i|_{S_i} = 1$
- $V_i|_{S_j} = 0 \quad \forall j \neq i$
- $V_i(\infty) = 0$

Por el teorema de unicidad la solución del conjunto de sistemas será:

$$V(\vec{r}) = V_1' \cdot V_1(\vec{r}) + V_2' \cdot V_2(\vec{r}) + \dots + V_n' \cdot V_n(\vec{r})$$

Que es la única que cumple las condiciones exigidas. Por lo tanto el campo vendrá dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\sum_{i=1}^n V_i' \cdot \nabla V_i$$

Y la carga del conductor puede ser expresada como:

$$\vec{E}^* = \frac{\rho_{si}}{\epsilon_0} \hat{n}_i \Rightarrow \rho_{si} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot \hat{n}_i \Rightarrow Q_i = \oint_{S_i} \rho_{si} dS_i \Rightarrow$$

$$Q_i = -\epsilon_0 \cdot \oint_{S_i} \left(\sum_{j=1}^n V_j' \frac{\partial V_j}{\partial n_i} \right) dS_i$$

$$\text{Si reescribimos } C_{ij} = -\epsilon_0 \cdot \oint_{S_i} \frac{\partial V_j}{\partial n_i} dS_i$$

$$\text{Tenemos que: } Q_i = \sum_j C_{ij} V_j'$$

Es decir, en un sistema de conductores existe relación entre cargas y potenciales.

Nótese que de aquí se deduce que, en general un conductor se encontrará a un cierto potencial distinto de 0 y que un conductor

$$* \vec{E}_{ext} = 0$$

puesto a potencial 0 cero tendrá carga distinta de 0. Además cargas y potenciales no pueden ser fijados independientemente, ya que conocidos unos los otros vendrán de esta relación.

Los coeficientes C_{ij} son magnitudes puramente geométricas, puesto que vienen determinados por la forma y disposición espacial de los conductores. Cuando $i=j$ el coeficiente C_{ii} se le llama coeficiente de capacidad y cuando $i \neq j$ coeficiente de inducción. A la matriz $n \times n$ construida por los coeficientes C_{ij} se le llama matriz de capacidad del sistema. En general puede deducirse que:

- $C_{ij} = C_{ji}$
- $U_i' = \sum_j P_{ij} Q_j$

Siendo los P_{ij} los coeficientes de la matriz inversa de la matriz de capacidad del sistema. Se le llaman coeficientes del potencial.

Ahora vamos a demostrar que los coeficientes de capacidad son simétricos, es decir: $C_{ij} = C_{ji}$.

Para demostrarlo partimos del th. de Gauss:

$$\int_V \nabla (V_i \nabla V_j) dV = \int (\nabla V_i) (\nabla V_j) dV + \int (V_i \nabla^2 V_j) dV = \int V_i \frac{\partial V_j}{\partial n} dS$$

$$\int_V \nabla (V_j \nabla V_i) dV = \int (\nabla V_j) (\nabla V_i) dV + \int (V_j \nabla^2 V_i) dV = \int V_j \frac{\partial V_i}{\partial n} dS$$

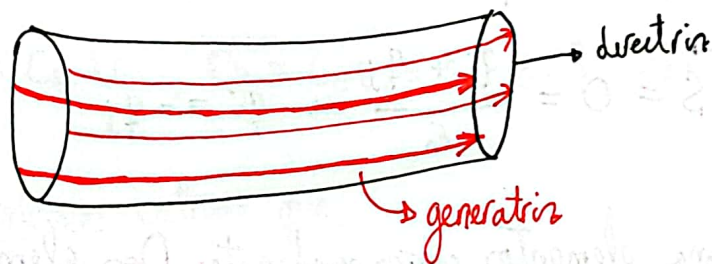
Si restamos:

$$\int_V (V_i \nabla^2 V_j - V_j \nabla^2 V_i) dV = \int V_i \frac{\partial V_j}{\partial n} dS - \int V_j \frac{\partial V_i}{\partial n} dS$$

Como $\nabla^2 V_j = \nabla^2 V_i = 0$ y $S_{\text{total}} = S_i + S_\infty \quad \forall i \in 1, \dots, n$; y los valores de V_j y V_i valen 1 en S_j y S_i respectivamente y 0 en el resto:

$$0 = \oint_{S_i} 1 \cdot \frac{\partial V_j}{\partial n_i} dS_i - \oint_{S_j} 1 \cdot \frac{\partial V_i}{\partial n_j} dS_j \rightarrow C_{ij} = C_{ji}$$

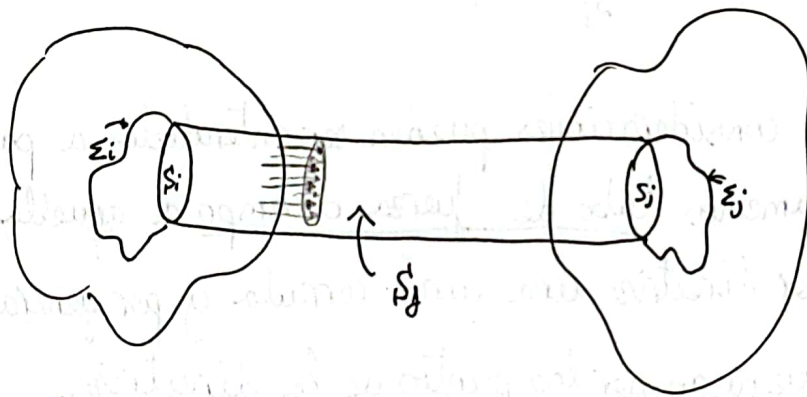
Muchos de estas consideraciones pueden ser entendidos a partir de ideas simples. Imaginemos tubo de fuerza o campo a aquella superficie que tiene por directriz una curva cerrada y por generatrices los líneas de campo que pasan por los puntos de la directriz.



tubo de campo

Si ahora tenemos un campo vectorial unievaluado, los líneas de campo no pueden cortarse y por lo tanto los líneas de campo construidos dentro del tubo no pueden salir de él.

Consideremos ahora dos conductores en equilibrio, y que un tubo de campo parte de la superficie de un conductor para acabar sobre la superficie de el otro. Consideramos las superficies de llegada y salida S_i, S_j . Ahora construyamos otras dos superficies Σ_i, Σ_j pero dentro del conductor (interior) apoyándolos en S_i, S_j , y construyamos el tubo de campo T :



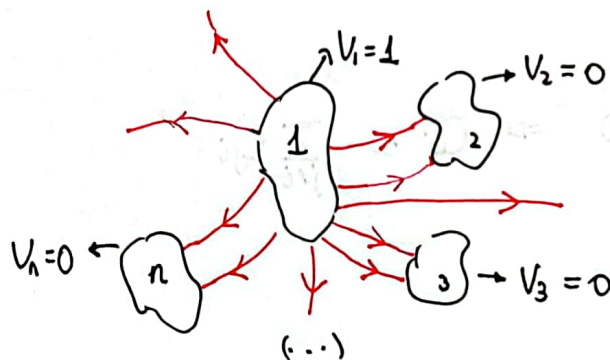
Sea $S = S_j + S_i + S_j$ podemos aplicar Gauss sobre la superficie

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{q_i + q_j}{\epsilon_0} \Rightarrow q_i = -q_j$$

A S_i y S_j se les llama elementos correspondientes. Dos elementos correspondientes tienen cargas de igual magnitud y de signos opuestos.

Si los cargos de los conductores son iguales y opuestos, todas las líneas de campo parten de un conductor al otro. En general todos los líneas de campo del sistema empiezan en algún conductor y terminan en otro. Si la carga total del sistema no es nula entonces habrá líneas de campo que van al infinito. Si $Q_T=0$ no habrá ninguna.

Ahora vamos a demostrar que los coeficientes de capacidad (C_{ii}) son positivos o nulos y los de influencia negativos o nulos (C_{ij}). Supongamos un sistema de n conductores con $V_1 = 1$ y $V_j = 0$:



Las líneas de campo van de 1 a i ($i=2,3,\dots,n$) o al infinito. Entonces está claro que $Q_1 > 0$ $Q_i \leq 0$. Además:

$$Q_1 = C_{11} \frac{V_1}{1}, \quad Q_2 = C_{21} \frac{V_1}{1} = C_{21}, \quad (\dots), \quad Q_n = C_{n1} \cdot \frac{V_1}{1} = C_{n1}$$

De donde podemos extraer que:

$$C_{11} > 0, \quad C_{1i} < 0$$

Evidentemente si cogemos una esfera que coge todos los conductores y hacemos gauss vemos que el flujo no es cero, es positivo y por lo tanto $Q_{enc} > 0$, por lo que:

$$Q_1 > - \sum_{j=2}^n Q_j = - \sum_{j=2}^n C_{j1} \Rightarrow C_{11} > - \sum_{j=2}^n C_{j1}$$

Generalizando: $C_{ii} > - \sum_{j \neq i} C_{ji} (*)$

Para que alguno de los coeficientes C_{ij} sea nulo y que la igualdad en (*) se deba tener el caso de tener un hueco rodeando algún otro conductor. Así

$$C_{ii} > 0, C_{ij} \leq 0 \Rightarrow C_{ii} \geq - \sum_{j \neq i} C_{ji}$$



... (faint text) ...

$$C_{11} = C_{22} = \dots = C_{nn} > 0, C_{ij} = C_{ji} < 0, C_{ii} > - \sum_{j \neq i} C_{ji}$$

... (faint text) ...

$$C_{ij} > 0, C_{ji} < 0$$

3.7. CAPACIDAD ELÉCTRICA:

El sistema más simple de conductores es un único conductor aislado. Las ecuaciones anteriores nos dicen que para este caso:

$$Q = C \cdot V$$

Siendo C un factor puramente geométrico. Entonces la relación carga eléctrica y potencial C se llamará capacidad eléctrica del conductor y se mide en Faradios (C/V)

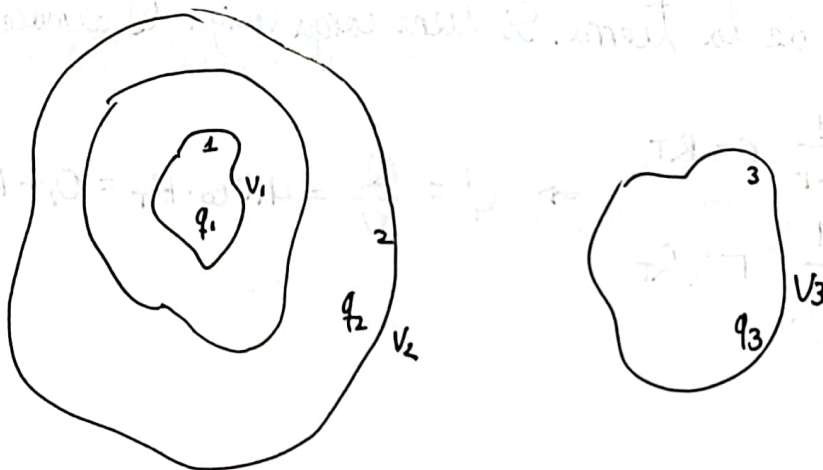
Ejemplo: Capacidad de la tierra. Si tiene una carga Q almacenada

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R_T} & r = R_T \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} & r > R_T \end{cases} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \cdot R_T = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ F}$$

3.8. CONCEPTO DE CONDENSADOR:

En los circuitos de corriente eléctrica se utiliza como uno de los elementos básicos el condensador, que se caracteriza por almacenar carga de signos opuestos en superficies en influencia total.

Visto de otro modo, un elemento capaz de almacenar energía eléctrica. Para entender el concepto de condensador pongamos un ejemplo previo. Vamos a estudiar la configuración particular de los sistemas de conductores:



Como hemos estudiado hay una relación entre cargas y potenciales:

$$\begin{cases} q_1 = C_{11} \cdot V_1 + C_{12} \cdot V_2 + C_{13} \cdot V_3 \\ q_2 = C_{21} \cdot V_1 + C_{22} \cdot V_2 + C_{23} \cdot V_3 \\ q_3 = C_{31} \cdot V_1 + C_{32} \cdot V_2 + C_{33} \cdot V_3 \end{cases}$$

Si consideramos la situación particular de $V_2 = V_3 = 0$ y $V_1 \neq 0$ tenemos dos problemas: uno en el interior y otro, más simple, en el exterior. En el exterior es obvio que si ponemos $V = 0$ se satisfacen las condiciones y las consecuencias son:

- $q_3 = 0 = C_{31} \cdot V_1 \Rightarrow C_{31} = C_{13} = 0$. ($C_{ij} = 0$)

- la carga de 2 puede estar en la S_{int} o S_{ext} . En este caso la carga está en la interna, que debe cumplir $q_2 = -q_1$. Por lo que:

$$q_1 = C_{11} \cdot V_1 = -C_{21} \cdot V_1 \Rightarrow C_{11} = -C_{21}$$

Se dice que los parejas de conductores que cumplen esta condición están en influencia total y forman un condensador. Mas exactamente el condensador es el conjunto formado por C_{11} y C_{21} (su superficie interna). Para potenciales arbitrarios en los 3 conductores:

$$q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 = C_{11} (V_1 - V_2)$$

Esto es, la carga de conductores depende únicamente de la diferencia de potencial entre los conductores 1 y 2.

Ahora podremos definir el concepto de condensador más rigurosamente.

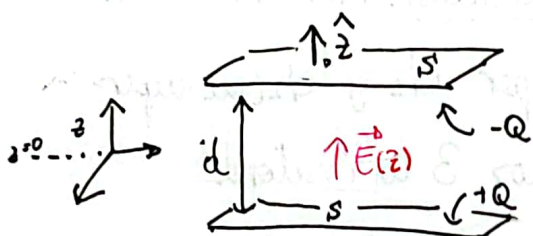
Un condensador se define como dos superficies conductoras en influencia total, y que por lo tanto almacenen cargas opuestas cuyo valor es proporcional a la diferencia de potencial (ΔV) independientemente del resto del sistema del que formen parte.

A la constante de proporcionalidad C se le denomina capacidad del condensador:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Ahora vamos a hacer los 3 ejemplos más representativos: un condensador plano, uno cilíndrico y otro esférico:

• Ejemplo 3.8.1: Condensador plano, superficie S , distancia d , cargas Q

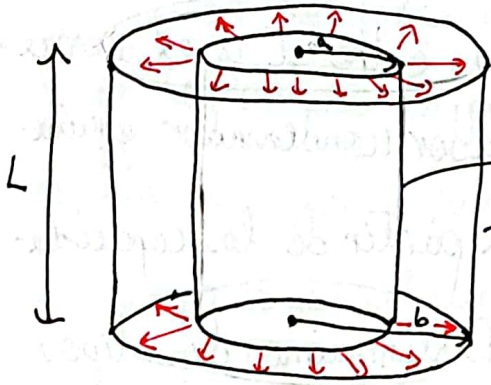


$$\vec{E} = \frac{Q}{S \epsilon_0} \hat{z} \quad |z| \leq d/2$$

La diferencia de potencial $\Delta V = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{S \epsilon_0} d$

Entonces: $C = \frac{Q}{\frac{Q}{S \epsilon_0} d} = \frac{S \epsilon_0}{d}$

- Ejemplo 3.8.2: Condensador cilíndrico: dos superficies conductoras de radio a y b y longitud L (despreciaremos efectos de borde).



$$\vec{E} = E(\rho) \hat{\rho} \rightarrow \text{Hacemos Gauss}$$

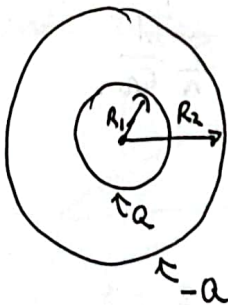
$$\oint E(\rho) dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(\rho) = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot S} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L \rho}$$

Por lo tanto: $\Delta V = \int_+^- \vec{E} d\vec{l} = \frac{Q/L}{2\pi \epsilon_0} \cdot \int_+^- \frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q/L}{2\pi \epsilon_0} \cdot \ln(b/a)$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

- Ejemplo 3.8.3: dos superficies esféricas concéntricas de radio R_1 y R_2 :



$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} ; \Delta V = \int_+^- \vec{E} d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} dr$$

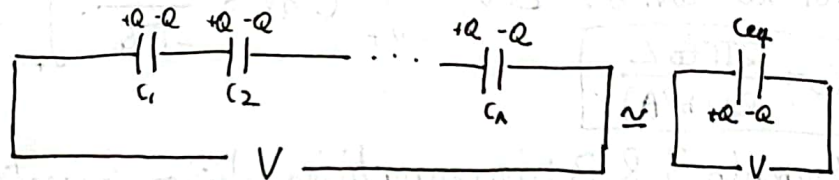
$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \right)$$

Por lo tanto $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi \epsilon_0 R_2 R_1}{R_2 - R_1}$

3.9. ASOCIACIONES DE CONDENSADORES:

Varios condensadores pueden ser conectados entre sí y el resultado se comporta como un nuevo condensador (condensador equivalente) cuya capacidad se puede obtener a partir de las capacidades de los condensadores constituyentes. Distinguimos dos tipos de asociaciones:

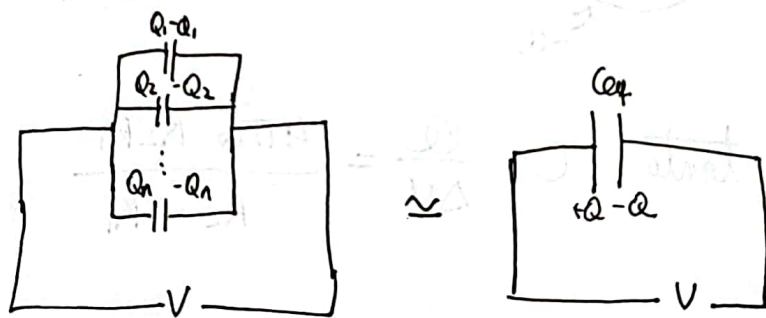
• Conexión en serie:



$$V = V_1 + \dots + V_n = \frac{Q}{C_1} + \dots + \frac{Q}{C_n} \Rightarrow V = Q \sum_n \frac{1}{C_n}$$

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \sum \frac{1}{C_i}$$

• Conexión en paralelo:



$$V = \frac{Q_1}{C_1} = (\dots) = \frac{Q_n}{C_n} \Rightarrow \frac{Q_1 + (\dots) + Q_n}{C_1 + (\dots) + C_n} = \frac{Q}{C_{eq}}$$

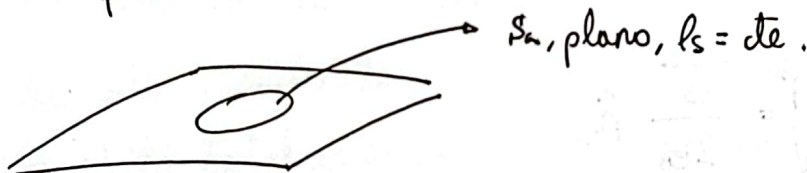
$$C_{eq} = \sum C_i$$

3.10. CARGA SUPERFICIAL Y FUERZA SOBRE UN CONDUCTOR:

El exceso de carga en un conductor se sitúa sobre la superficie del mismo. En presencia de un campo eléctrico esta experimenta una fuerza, pero al tener densidad de carga superficial el campo es discontinuo, ya que: $\hat{n} (\vec{E}_{ext} - \vec{E}_{int}) = \rho_s / \epsilon_0$. Por lo tanto la fuerza por unidad de área será

$$\vec{F} = \frac{\rho_s}{2} (\vec{E}_{ext} + \vec{E}_{int})$$

Ahora bien. ¿Por qué este resultado? Supongamos que tenemos el siguiente esquema:



El campo total en S_a vendrá dado por:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{S_a} + \vec{E}_{resto}$$

Es evidente que la fuerza debe ser ejercida por \vec{E}_{resto} (una superficie no puede ejercer fuerza sobre sí misma). Recordando

$$\begin{aligned} \hat{n} \uparrow \cdot \vec{E}_1 &= \rho_s / 2 \epsilon_0 \cdot \hat{n} \\ \vec{E}_2 &= -\rho_s / 2 \epsilon_0 \hat{n} \end{aligned}$$

A hand-drawn diagram showing a small circular surface element labeled S_a . A normal vector \hat{n} points upwards from the center of the circle. Two electric field vectors are shown: \vec{E}_1 pointing upwards and \vec{E}_2 pointing downwards, both originating from the center of the circle.

Tenemos que:

$$\vec{E}_{arriba} = \vec{E}_{exto} + \vec{E}_1 = \vec{E}_{exto} + \rho_s / 2\epsilon_0 \cdot \hat{n}$$

$$\vec{E}_{abajo} = \vec{E}_{exto} + \vec{E}_2 = \vec{E}_{exto} - \rho_s / 2\epsilon_0 \cdot \hat{n} \Rightarrow$$

$$\vec{E}_{exto} = \frac{1}{2} (\vec{E}_{arriba} + \vec{E}_{abajo})$$

En el caso de un conductor $\vec{E}_{abajo} = \vec{E}_{int} = 0$ y:

$$\vec{E}_{exto} = \frac{1}{2} \vec{E}_{arriba} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

Y la fuerza por unidad de área:

$$\vec{f} = \frac{\rho_s^2}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

Y la fuerza total sobre el conductor:

$$\vec{F} = \int_S \frac{\rho_s^2}{2\epsilon_0} \hat{n} dS$$

4. DIELECTRICO:

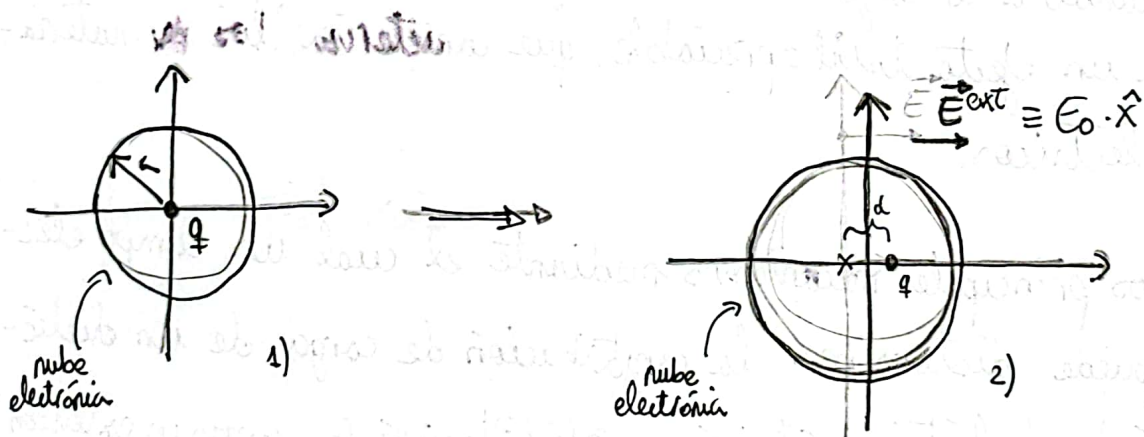
En el tema anterior hemos hablado de conductores y aislantes, y de cargas libres. Un aislante o dielectrico es un material en el que los cargas estan ligadas a atomos o moléculas, y el único movimiento que puede ocurrir de los cargas se encuentra "encerrado" en el atomo (por ejemplo movimiento del electrón dentro del atomo, o molécula), los desplazamientos microscópicos de los que hablamos no tienen una consecuencia tan dramática como todo un cambio en la distribución de carga en el conductor, pero acumulando estos movimientos lo largo de muchos atomos si que se crea un efecto total apreciable, que caracteriza a los materiales dielectricos.

Hay dos principales mecanismos mediante el cual un campo eléctrico puede distorsionar la distribución de carga de un átomo o molécula dielectrica: rotación y redistribución de cargas (o extensión)

4.1. DIPOLO INDUCIDO:

¿Cuál es el efecto que tiene darle a un átomo neutro un campo \vec{E} ? Al tener carga nula probablemente una respuesta sería "nada". Sin embargo estaríamos ignorando una de las características más importantes del átomo: que en su interior hay cargas no nulas.

Entonces el protón, de carga positiva, se desplazará en el sentido del campo, y el electrón en la opuesta. Si el campo es lo suficientemente fuerte puede ionizar la carga y convertirlo en un conductor. Si el campo no es tan fuerte habrá un equilibrio, en el que el centro de la nube electrónica deja de encontrarse en el protón. El equilibrio se sucederá cuando las fuerzas entre protón-neutrón y campo eléctrico se anulen mutuamente.



nube electrónica \equiv simétrica esférica

La configuración inicial del átomo 1) produce un campo eléctrico nulo en el exterior. Si aplicamos un campo \vec{E} al núcleo genera un momento dipolar en el átomo y por lo tanto el campo generado por el átomo en el exterior deja de ser nulo. Ahora vamos a estudiar la relación entre el momento dipolar (\vec{p}) y el campo \vec{E} . Aplicando Gauss a la nube electrónica (campo \vec{E} generado por ella):

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{S} = E_e \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_e}{\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = -\frac{3q}{4\pi a^3} \cdot \frac{4\pi r^3}{3\epsilon_0}$$

\downarrow integramos.
 $\vec{E}_e = E_e \hat{r}$
 $d\vec{S} = ds \cdot \hat{r}$

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_e = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{a^3}$$

Entonces en el punto de equilibrio:

$$\vec{E} - \vec{E}_e = 0 \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_e \Rightarrow$$

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(q \cdot d)}{a^3}$$

Por lo que $p = q \cdot d$:

$$p = 4\pi\epsilon_0 \cdot a^3 \cdot E_0 = 3 \cdot V \cdot \epsilon_0 \cdot E_0; \vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \cdot a^3 \cdot E_0 \cdot \hat{x}$$

En general el momento dipolar inducido por un campo \vec{E} será proporcional al campo; y se relacionan mediante una constante llamada polarizabilidad atómica:

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}$$

El efecto conjunto de los moléculas polarizadas dan lugar a un campo macroscópico observable que calcularemos más adelante. El valor de α depende de la estructura del átomo (el caso calculado es el más simple).

4.2. ALINEAMIENTO DE MOLECULAS POLARES:

En el caso anterior el átomo no tenía un momento dipolar hasta que un campo eléctrico externo \vec{E} le inducía un momento dipolar. Sin embargo existen moléculas que incluso sin aplicarles un campo eléctrico aparece un momento dipolar no nulo ($\vec{p} \neq 0$). Estas moléculas se llamarán moléculas polares, como el agua.

En general una sustancia polar tiene un montón de moléculas orientados de forma arbitraria lo que hace que en cada punto el momento dipolar neto sea cero en cada punto. Sin embargo al aplicarle un campo eléctrico \vec{E} externo los dipolos se orientarán en la dirección del campo. A este tipo de polarización se le llama polarización por orientación.

4.3. VECTOR POLARIZACION:

En las secciones anteriores estudiamos los efectos que se producen al aplicarle a un átomo o molécula dieléctrica un campo \vec{E} .

En ambos casos se produce un momento dipolar con la misma dirección que \vec{E} (sea neutra no polar o polar la molécula en cuestión). Cuando ocurre esto decimos que el material se ha polarizado. Para medir lo polarizado que está un átomo/molécula estudiamos la polarización \vec{P} que se define como:

$\vec{P} \equiv$ momento dipolar eléctrico por unidad de volumen.

Se mide en C/m^2 . Olvidándonos del campo \vec{E} que produce la polarización centrémonos en el campo que se produce tras aplicar el campo \vec{E} ; que será la suma de \vec{P} y \vec{E} . En general podemos describir el momento dipolar total de un volumen como:

$$\vec{P}_{total} = \int_V \vec{P}(\vec{r}) \cdot dV$$

4.4. CAMPO ELÉCTRICO PRODUCIDO POR UN MATERIAL POLARIZADO:

Vale, ahora calculemos el campo producido por el dieléctrico como sabemos el potencial producido por un dipolo \vec{p} :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$

Como ahora estamos evaluando el momento dipolar total causado por un material dieléctrico con volumen y polarización:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{P(r') \hat{r}}{r^2} dV'$$

Que como $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\hat{r}}{r^2}$ podemos reescribirlo:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V P(r') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) d\tau'$$

Que integrando por partes:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\int_V \nabla' \cdot \left(\frac{P}{r} \right) d\tau' - \int_V \frac{1}{r} (\nabla' \cdot P) d\tau' \right]$$

Y usando el teorema de Gauss:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r} \cdot P \cdot d\vec{A}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \cdot (\nabla' \cdot P) d\tau'$$

Podemos distinguir ambos términos:

• $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ \Rightarrow Es el potencial generado por la distribución de carga superficial $\rho_s = \vec{P} \cdot \hat{n}'$, \hat{n}' es la normal hacia fuera del volumen.

$$\rho_s = \sigma_b \equiv \vec{P} \cdot \hat{n}$$

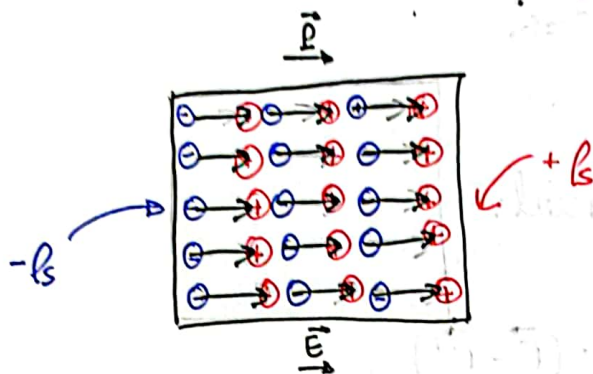
• $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(-\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$ \Rightarrow Es el potencial generado por la distribución de carga volumétrica: $\rho_v = -\nabla' \cdot \vec{P}$

$$\rho_b = \rho_v \equiv -\nabla' \cdot \vec{P}$$

Tanto ρ_b como σ_b se denominan densidades de carga de polarización

Por lo tanto el campo generado por un dieléctrico polarizado es el mismo que el generado por ρ_v y ρ_s

Podemos intentar buscarle significado físico a estos elementos.
 Para un elemento dieléctrico de polarización constante las cargas se redistribuirán o se alinearán de tal forma que:



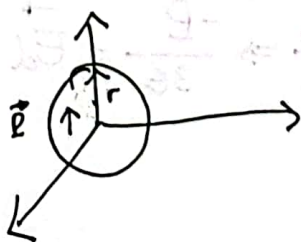
Como podemos ver la carga total será cero pero debido a la alineación de los moléculas dieléctricas aparecerán densidades de carga superficiales. Si calculamos la carga total:

$$Q_{\text{tot}} = \int P_s \cdot dS + \int P_v \cdot dV = \int \vec{P} \cdot \hat{n} dS + \int \nabla \cdot \vec{P} \cdot dV \stackrel{\text{ley Gauss}}{=} 0$$

Si tuviéramos cargas libres no sería cero. Ahora vamos a poner un ejemplo típico: esfera uniformemente polarizada.

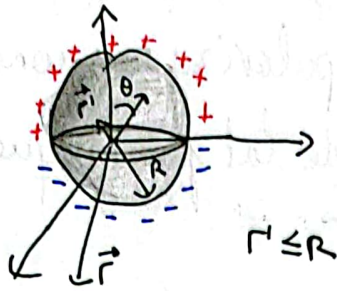
• Ejemplo 4.4.1: esfera uniformemente polarizada.

$$\vec{P} = P \cdot \hat{z} \Rightarrow \begin{cases} P_v = -\nabla \cdot \vec{P} = 0 \rightarrow \text{derivada de un cte.} \\ P_s = \vec{P} \cdot \hat{n} = P \cdot \hat{r} = P \cdot \hat{z} \cdot \hat{r} = P \cdot \cos \theta \end{cases}$$



Entonces:

$$P_s = P \cdot \cos \theta$$



Ahora calculamos el potencial:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Que como $\vec{P} = \text{cte.}$ tenemos que podemos sacar la fuera de la integral, y la integral en cuestión ya la hemos resuelto:

$$\int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = \begin{cases} \frac{R^3}{3\epsilon_0 \cdot r^2} \hat{r} & r > R \\ \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{r} & r < R \end{cases}$$

Por lo que:

$$V = \begin{cases} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{3\epsilon_0} & r < R \rightarrow \vec{E}_d = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \\ \frac{\vec{P} \cdot R^3 \cdot \hat{r}}{3\epsilon_0 \cdot r^2} & r > R \end{cases}$$

$$\vec{E}_d \text{ viene de: } \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{3\epsilon_0} = \frac{P r \cos \phi}{3\epsilon_0} = \frac{P \cdot z}{3\epsilon_0} \Rightarrow \frac{-\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E}_d$$

Y por lo tanto el campo \vec{E} vendrá dado por:

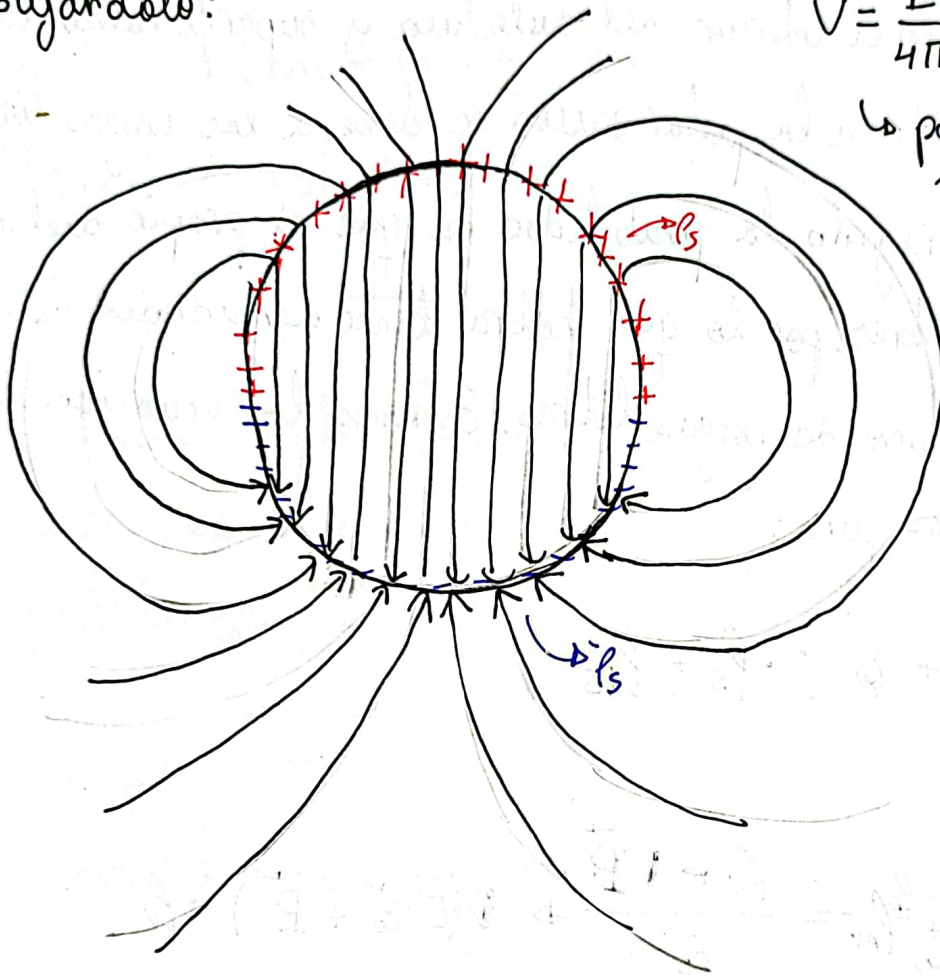
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^3} \quad (\hat{r} \neq 0) \quad (r > R)$$

$$\text{con } \vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P} \rightarrow$$

Dibujándolo:

$$V = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \rightarrow \vec{E}_f$$

↳ potencial de un dipolo



do cual tiene mucho sentido: los líneas de campo van de las cargas positivas a los negativos.

4.5. ECUACIONES DE LA ELECTROESTÁTICA EN PRESENCIA DE DIELECTRICO

Hemos visto que el efecto de polarización es producir cargas ρ_v y ρ_s (volumétricas en el interior del dieléctrico y superficiales). El campo eléctrico debido a la polarización se debe a los cargos ligados. Tampoco hemos negado la posibilidad de que el propio dieléctrico posea cargas libres, por lo que habrá tanto densidades de carga de polarización como de cargas libres. Entonces las ecuaciones anteriores son válidas para:

$$\rho_v + \rho_{v'} ; \rho_s + \rho_{s'}$$

En ese caso:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v + \rho_{v'}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_v + \nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot (\vec{E} \cdot \epsilon_0 + \vec{P}) = \rho_v$$

Y si reescribimos $\vec{E} \cdot \epsilon_0 + \vec{P} = \vec{D}$ tenemos que

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

Y las condiciones de frontera

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \Rightarrow \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s$$

Sin embargo que $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$ no implica que los fuentes de \vec{D} sean únicamente la de las cargas libres. El campo \vec{D} viene dado por su divergencia y su rotacional; y aunque $\nabla \times \vec{E}$ sea 0, no tiene porque $\nabla \times \vec{D} = 0$; ya que $\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}$, con lo que los fuentes de \vec{D} son tanto cargas de polarización como, cargas libres. Como $\nabla \times \vec{D} \neq 0$ puede ocurrir, en general \vec{D} no viene dado por un potencial

Solo se puede calcular \vec{D} , en problemas de muy alta simetría, y en aquellos casos donde $\nabla \times \vec{P} = 0$, mediante Gauss. Si no se cumplen estas dos condiciones \vec{D} no se puede calcular por Gauss tal que

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_v.$$

Ahora vamos a estudiar algunos ejemplos.

• Ejemplo 4.5.1: esfera uniformemente polarizada

Tal y como hemos calculado antes:

$$\vec{E}_d = -\vec{P} / 3\epsilon_0$$

$$\vec{E}_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3(\vec{P} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{P}}{r^3} \quad \text{con } \vec{p} = \frac{4}{3}R^3 \vec{P}.$$

Entonces aplicando la definición de $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ y como $\vec{P}(r > R) = 0$ tenemos que:

$$\vec{D}_a = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = -\frac{\vec{P}}{3} + \vec{P} = \frac{2}{3} \vec{P}$$

$$\vec{D}_f = \epsilon_0 \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\frac{3(\vec{P} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{P}}{r^3} \right]$$

El campo $\vec{D} \neq 0$ aún en ausencia de cargas libres. Entonces por el teorema de Helmholtz un campo viene dado por su divergencia y su rotacional. Como $\nabla \cdot \vec{D} = 0 = \rho_f$ tenemos que entonces $\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P} \neq 0$. Es evidente que en los únicos puntos donde el rotacional de \vec{P} tienen que encontrarse en la superficie.

Sea $\theta(x)$ la función escalón de Heaviside tal que

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$$

Entonces podemos definir \vec{P} como $\vec{P} = \hat{z} \cdot (P \theta(a-r))$ siendo a el radio de la esfera. Entonces $\vec{P} = P \cdot \theta(a-r) \cdot (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$.

Calculando el rotacional:

$$\nabla \times \vec{P} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ P\theta(a-r)\cos\theta & -P\theta(a-r)\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{P} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot r \sin \theta \hat{\phi} \cdot \left(-P\theta(a-r)\sin\theta + P\theta(a-r)\sin\theta + P\theta(a-r)\sin\theta \right)$$

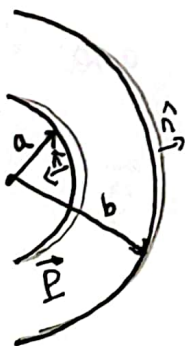
$$\nabla \times \vec{P} = \frac{1}{r} \hat{\phi} \cdot (P \cdot r \theta (a-r) \sin \theta) = P \sin \theta \theta (a-r) \hat{\phi}$$

- Ejemplo 4.5.2: una capa esférica de radio interno a y externo b está hecha de un material dieléctrico de polarización:

$$\vec{P} = \frac{\kappa}{r} \hat{r}$$

Vamos a dividirlo en dos apartados; calculando \vec{E} de dos formas:

- Calcular los cargas ligados y a partir de estos \vec{E}
- Calcular \vec{D} y luego \vec{E} , método más sencillo.



- Calculamos los cargas ligados:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \cdot \left(r^2 \cdot \frac{\kappa}{r} \right) = -\frac{\kappa}{r^2}$$

$$\sigma_b (r=b) = \vec{P} \cdot \hat{r} \Big|_b = \frac{\kappa}{b}$$

$$\sigma_a (r=a) = -\vec{P} \cdot \hat{r} \Big|_a = -\frac{\kappa}{a}$$

↳ negativo pq. \hat{r} va hacia dentro de la esfera (fuera de la superficie)

Como $\vec{E} = \left(\frac{\rho_{lig} + \rho_{lib}}{\epsilon_0} \right) \Rightarrow \oint \vec{E} dS = \frac{Q_{enc\ lig} + Q_{enc\ lib}}{\epsilon_0}$

Para los diferentes \vec{r} :

• $r < a \rightarrow Q_{enc\ lig} + Q_{enc\ lib} = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$

• $a < r < b \quad \oint \vec{E} dS = \frac{Q_{enc\ lig}}{\epsilon_0}$

$$Q_{enc\ lig} = \sigma_a \cdot S_a + \int_V \rho_b dV = -\frac{\kappa}{a} 4\pi a^2 + \int_a^r -\frac{\kappa}{r^2} 4\pi r^2 dr$$

$$Q_{enc\ lig} = -\kappa \cdot 4\pi a + \kappa \cdot 4\pi a - \kappa 4\pi r$$

Entonces: $\vec{E} = \frac{-\kappa 4\pi r}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \hat{r} = \frac{-\kappa}{\epsilon_0 r} \hat{r} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$

• $r > b$. Per ser dielectrico $Q_r = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$

b) Si utilizamos \vec{D} . Como $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{lib.\ enc} = 0$; $\vec{D} = 0 \forall r$.

Entonces si $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \rightarrow \epsilon_0 \vec{E} = -\vec{P} \rightarrow \vec{E} = \frac{-\vec{P}}{\epsilon_0}$

Como $\vec{P} = 0$, $r < a$ o $r > b$:

$$\vec{E} = \frac{-\vec{P}}{\epsilon_0} \quad a < r < b; \quad \vec{E} = 0 \quad r \text{ resto}$$



• Ejemplo 4.5.3: Materialo: sea una esfera de radio a y constante dieléctrica ϵ , con una carga q en el centro. Calcular \vec{D} , \vec{E} y \vec{P} en todo punto. Calcular los cargos de polarización. Comprobar que la carga total de polarización es nula. Comprobar que el campo \vec{E} es debido a la carga libre y ligada.

El problema tendrá simetría esférica. $\vec{D}(r) = D(r) \cdot \hat{r}$. Como $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{lib}$, tenemos que:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_v = q \rightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (r \neq 0)$$

El campo instantáneo creado por q y $\vec{D} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} & r < a \\ \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} & r > a \end{cases}$$

Y como $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$:

$$\vec{P} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Calculamos los densidades de carga de polarización:

$$\bullet \rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{q}{4\pi} \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = -q \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \delta(\vec{r})$$

$$\bullet \rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{r} \Big|_a = \frac{q}{4\pi} \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$Q_p = \int \rho_{pv} dV + \oint_a \rho_{ps} dS = -q \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) + \frac{q}{4\pi a^2} \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) 4\pi a^2 = 0$$

Entonces el campo creado por estas cargas: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{ext} + Q_{ext}}{\epsilon_0}$

$$\bullet r < a \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q - q \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon}$$

$$\bullet r > a \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q + 0}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

• Ejemplo 4.5.4. Cosas que no hacer. Suponemos un hilo conductor infinito con densidad uniforme ρ_L rodeado por un cilindro dieléctrico de radio R . Calcular \vec{D} y \vec{E} en todo el espacio: Por simetría $\vec{D} = D(\rho) \hat{\rho}$

$$\text{Como } \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libenc} \rightarrow D(\rho) \cdot 2\pi\rho l = \rho_L \cdot l \rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \hat{\rho}$$

Podemos calcular \vec{E} fuera ($\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$); pero no podemos calcular \vec{E} dentro del dieléctrico, para ello necesitamos conocer \vec{P} , o relacionar \vec{P} con \vec{D} o con \vec{E} . Estas relaciones dependerán del material.

4.6. CLASIFICACIÓN DE LOS DIELECTRICOS:

Después del ejemplo del átomo bajo un campo eléctrico es de esperar que exista una relación funcional entre la polarización y el campo eléctrico. Es decir esperamos:

$$\vec{P} = \vec{P}(E)$$

Este tipo de relaciones no pueden obtenerse del electromagnetismo, han de provenir de la experiencia. En el caso de medios lineales isotropos tenemos que:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

χ_e es la susceptibilidad dieléctrica del medio. Si $\chi_e = \chi_e(\vec{r})$, dependiendo de la posición el medio se dice lineal isotropo y no homogéneo. Si $\chi_e = \text{cte}$ se dice homogéneo.

En estos medios lineales e isotropos:

$$\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e) \vec{E}$$

Y si escribimos $\epsilon_0(1 + \chi_e) = \epsilon$ tenemos la constante dieléctrica o permitividad.

Si consideramos el ejemplo 4.5.4 de nuevo sabiendo que es un material dieléctrico isotrópico, homogéneo y lineal:

Como $\vec{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \hat{\rho}$ calculamos \vec{E}

$$\bullet \rho < R; \vec{D} = \epsilon \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho} \hat{\rho}$$

$$\bullet \rho > R; \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$

Y por lo tanto $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$

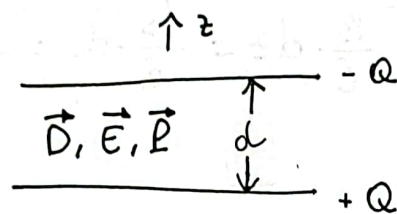
$$\vec{P} = \begin{cases} \vec{P} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{\rho} & \rho < R \\ \vec{P} = 0 & \rho > R \end{cases}$$

4.7. CONDENSADORES CON DIELECTRICOS:

En esta seccion no trataremos nada teorico; todo seran ejemplos, para condensadores planos, cilindricos y esfericos.

CONDENSADORES PLANOS:

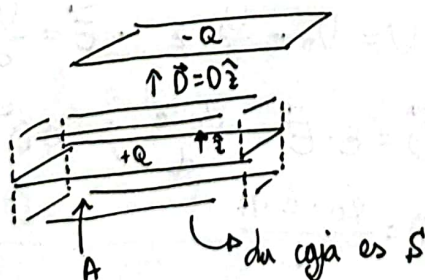
1. Condensador plano paralelo con dielectrico entre placas. Suponemos que no hay campo fuera del conductor despreciando el efecto de bordes.



Por simetria sabemos que $\vec{D} = D(z)\hat{z}$; $\vec{E} = E(z)\hat{z}$; $\vec{P} = P(z)\hat{z}$

Como $\rho_v = 0$ entre los placas $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, y por lo tanto $\vec{D} = D\hat{z}$. Calculamos \vec{D} usando el th de Gauss:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}} \Rightarrow D \cdot A = Q_{\text{enc}} \Rightarrow D = \frac{Q}{A} = \rho_s$$



Si suponemos que el medio es lineal, homogéneo e isotrópico:

$$\vec{D} = \rho_s \hat{z} ; \vec{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \hat{z} ; \vec{P} = \rho_s \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{z}$$

Como sabemos la capacidad de un condensador viene definida como:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_+ - V_-} \text{ siendo } V_+ \text{ potencial en } Q_+ \text{ y } V_- \text{ en } Q_-.$$

Entonces:

$$V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_+^- \frac{\rho_s}{\epsilon} dz = \frac{\rho_s}{\epsilon} d = \frac{Qd}{\epsilon \cdot A}$$

Y tenemos que:

$$C = \frac{\epsilon \cdot A}{d}$$

Otra forma de resolverlo: Como $\rho_v = 0$; $V = V(z) \rightarrow \nabla^2 V = 0 \rightarrow$

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \rightarrow Az + B = 0 \rightarrow V(0) = A = V_0 ; V(d) = 0 = V_0 + B \cdot d \rightarrow B = -\frac{V_0}{d}$$

$$z=d \text{ ————— } V=0$$

$$z=0 \text{ ————— } V=V_0$$

$$V = V_0 + \frac{V_0}{d} z \rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{d} \hat{z}$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} = \frac{V_0 \cdot \epsilon}{d} ; \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q = D \cdot A$$

$$Q = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot A}{d}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\frac{V_0 \cdot \epsilon \cdot A}{d}}{V_0 - 0} = \frac{\epsilon \cdot A}{d}$$

3. Condensador cilíndrico relleno de dieléctrico no-homogéneo:

Sea la constante dieléctrica:

$$\epsilon(\rho) = \epsilon_0 \rho^n$$

Calculamos como antes $\vec{D}(\rho) = D(\rho) \hat{\rho} = \frac{A}{\rho} \hat{\rho}$; $A = \frac{Q}{2\pi L}$

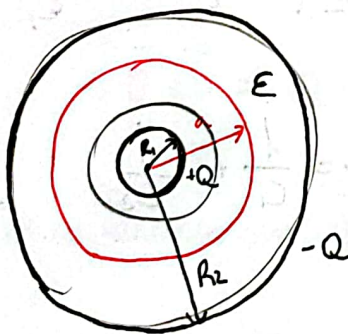
Entonces si $\vec{D} = \frac{Q}{2\pi L} \cdot \frac{\hat{\rho}}{\rho}$; $\vec{E} = \frac{\vec{D}(\rho)}{\epsilon(\rho)} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \cdot \frac{\hat{\rho}}{\rho^{n+1}}$

Calculamos DV: $\Delta V = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{R_1^n} - \frac{1}{R_2^n} \right)$

Y la capacidad sera: $C = 2\pi \epsilon_0 \cdot L \cdot n \cdot \left(\frac{1}{R_1^n} - \frac{1}{R_2^n} \right)^{-1}$

CONDENSADOR ESFÉRICO:

1. Condensador esférico: suponemos un dieléctrico lineal homogéneo e isotropo. El problema tendrá simetría esférica:



$$\vec{D} = D(r) \cdot \hat{r}$$

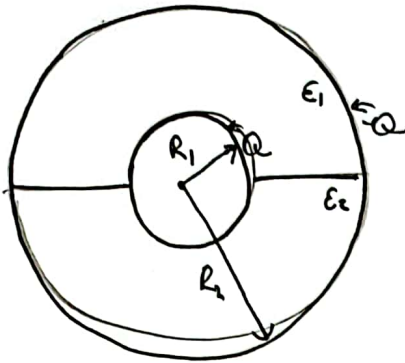
Como $\rho_{ext} = 0 \rightarrow \vec{D} = \frac{A}{r^2} \hat{r}$

Calculamos A: $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \rightarrow A = \frac{Q}{4\pi}$

Entonces $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}$; $V = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{-\hat{r}}{r}$

$$\Delta V \Big|_{R_2}^{R_1} = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \rightarrow C = 4\pi \epsilon \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

- 2. Condensador esférico con dieléctricos ϵ_1 y ϵ_2 : suponemos el medio homogéneo, isotrópico y lineal.



Tenemos que en la superficie de separación de los dieléctricos:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 \rightarrow \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_1} = \frac{\vec{D}_2}{\epsilon_2} \rightarrow \frac{A_1}{\epsilon_1} = \frac{A_2}{\epsilon_2}$$

Como $\vec{D}_1 = \frac{A_1}{r^2} \hat{r}$ y $\vec{D}_2 = \frac{A_2}{r^2} \hat{r}$ y $\oint \vec{D} d\vec{S} = Q$ tenemos que:

$$2\pi (A_1 + A_2) = Q \rightarrow (A_1 + A_2) = \frac{Q}{2\pi}$$

Calculando:

$$A_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} A_2 ; A_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} A_1 \rightarrow (A_1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} A_1) = \frac{Q}{2\pi} \rightarrow A_1 = \frac{Q \cdot \epsilon_1}{(\epsilon_2 + \epsilon_1) 2\pi}$$

$$A_2 = \frac{Q \cdot \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) 2\pi}$$

Tenemos que entonces: $\vec{E} = \frac{Q}{(\epsilon_2 + \epsilon_1) 2\pi} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}$

Calculamos el potencial $\Delta V = \int_+^- \vec{E} d\vec{l} = \frac{Q}{(\epsilon_2 + \epsilon_1) 2\pi} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

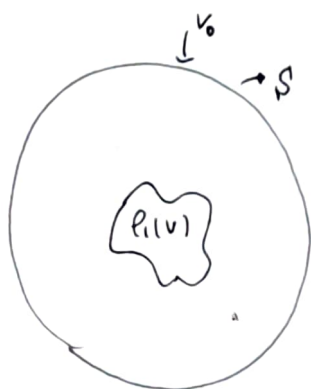
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 2\pi (\epsilon_2 + \epsilon_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = C_1 + C_2$$

5. METODO DE LAS IMÁGENES:

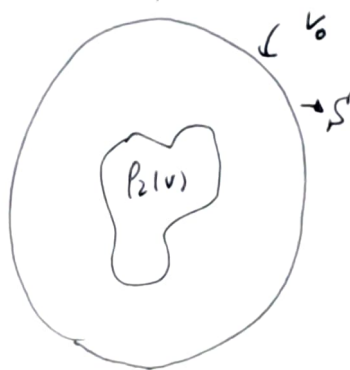
Es una aplicación directa del teorema de unicidad de solución. Consiste principalmente en buscar para un problema electrostático en una región dada, una solución a partir de otro problema mucho más sencillo, resolviendo el problema inicial.

Aunque ya lo hemos demostrado, repasemos este teorema:

- Teorema: supongamos dos problemas tal que



problem 1



problema 2.

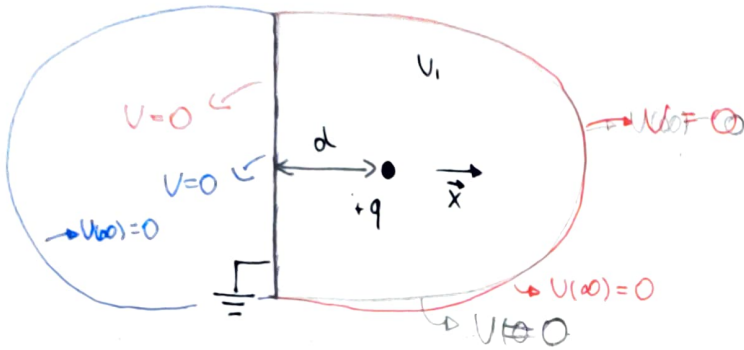
Supongamos las densidades de carga diferentes ρ_1 y ρ_2 y dos potenciales distintos V_1 y V_2 . Supongamos un volumen V delimitado por S . Supongamos que en este volumen $\rho_1|_V = \rho_2|_V$, pero fuera pueden ser diferentes. Entonces si en la superficie S los potenciales coinciden (condiciones de Dirichlet), coinciden en todo el volumen:

$$V_1|_S = V_2|_S \Rightarrow V_1|_V = V_2|_V$$

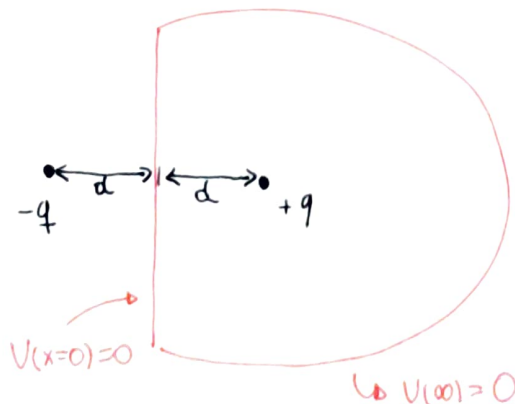
A partir de ahora veremos y estudiaremos todos los posibles ejercicios y problemas que podemos resolver con este método.

5.1. CARGA - PLANO:

Sea una carga puntual q y un conductor infinito conectado a tierra de la siguiente forma:



Esto claro que para $x < 0$ la solución será $V=0$; $\vec{E}=0$. Para resolver el problema del potencial en $x > 0$ usaremos el método de las imágenes para hallar la solución. Está claro que si colocamos una carga $-q$ a una distancia $-d$ de $x=0$ (y a la altura de q) tenemos que en $x=0$ el potencial será 0, y como $V(\infty)=0$ y en $x > 0$ lo seguirá siendo igual, por nuestro teorema $V_1 = V_2 = V$:



La solución del problema viene dado por la superposición del potencial de ambas cargas:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}}$$

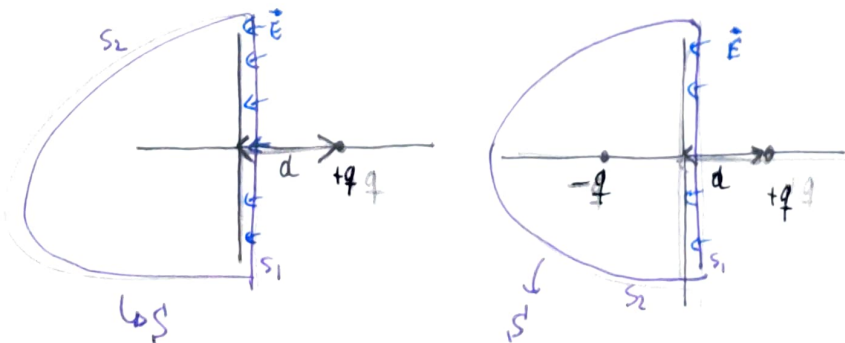
Ahora si comprobamos vemos que para $x=0$ $V=0$; y que para $r \rightarrow \infty$ $V=0$. Calculamos el campo:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{\frac{z}{2} \cdot (x+d)}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{\frac{z}{2} \cdot (x-d)}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right)$$

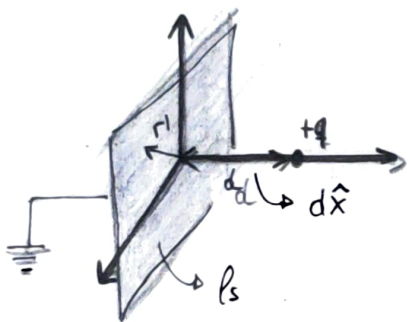
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{q \cdot z}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right)$$

La carga que aparece en el plano $x=0$ debe ser $-q$, ya que si calculamos el flujo en las superficies siguientes:



Como $\int_{S'} \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} = q_{enc}$ y ambos flujos son iguales la carga encerrada por el problema 1 debe ser la misma.

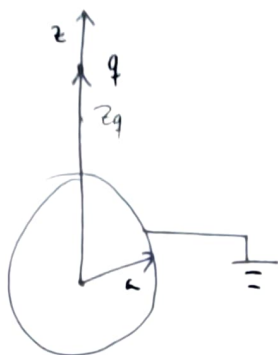
Además esta densidad de carga ejercerá una fuerza sobre la carga q . Evidentemente la fuerza que ejerce el plano va a ser el mismo que el que ejerce la carga $-q$:



$$\text{Entonces: } F_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-q}{(2d)^2} \hat{x}$$

5.2. CARGA - ESFERA:

Primero supondremos una carga puntual en presencia de una esfera conductora conectada a tierra (más adelante le daremos otro potencial).



Podemos encontrar una carga q' imagen que se encontrará dentro de la esfera y situada a $z_{q'}$ del Origen de tal forma que:



Entonces podemos determinar la posición $z_{q'}$ y el valor de la carga q' para los cuales $V(a, \varphi, z)$ sea 0. Está claro que el potencial para cualquier punto:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{q}{|r\hat{r} - z_q\hat{z}|} + \frac{q'}{|r\hat{r} - z_{q'}\hat{z}|} \right]$$

Entonces para que $V(a, 0, \varphi) = 0$ tenemos que:

$$V(r=a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|a\hat{r} - z_q\hat{z}|} + \frac{q'}{|a\hat{r} - z_{q'}\hat{z}|} \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{a \left| \hat{r} - \frac{z_q}{a} \hat{z} \right|} + \frac{q'}{z_{q'} \left| \frac{a}{z_{q'}} \hat{r} - \hat{z} \right|} \right] = 0$$

Para que se iguale a 0 podemos suponer:

$$\bullet \left| \hat{r} - \frac{z_q}{a} \hat{z} \right| = \left| \frac{a}{z_{q'}} \hat{r} - \hat{z} \right| \rightarrow$$

$\downarrow p$ $\downarrow q$

$$\bullet \left| \hat{r} - p\hat{z} \right|^2 = \frac{p^2}{|r|^2} + \frac{(z - |E|p)^2}{|r|^2} = \frac{p^2}{|r|^2} + \frac{z^2}{|r|^2} + p^2 + 2 \cdot z \cdot p \cdot |r|^{-1}$$

$$\bullet |q\hat{r} - \hat{z}| = \frac{p^2}{|r|^2} \cdot q^2 + \frac{(qz + |E|)^2}{|r|^2} = q^2 \cdot \left(\frac{p^2}{|r|^2} + \frac{z^2}{|r|^2} \right) + 1 - 2qz|r|^{-1}$$

Entonces está claro que para que se verifique la igualdad:

$$p = q \rightarrow \frac{z_q}{a} = \frac{a}{z_{q'}} \rightarrow z_{q'} = \frac{a^2}{z_q}$$

Y para que se iguale a 0 se puede verificar que:

$$-\frac{q}{a} = \frac{q'}{z_{q'}} \rightarrow \frac{q}{a} = \frac{z_q}{a^2} q' \rightarrow q' = \frac{aq}{z_q}$$

Entonces los valores de q' y $z_{q'}$ tienen que ser:

$$q' = -\frac{a}{z_q} q \quad ; \quad z_{q'} = \frac{a^2}{z_q}$$

Entonces el potencial en la región $r > a$ tenemos que:

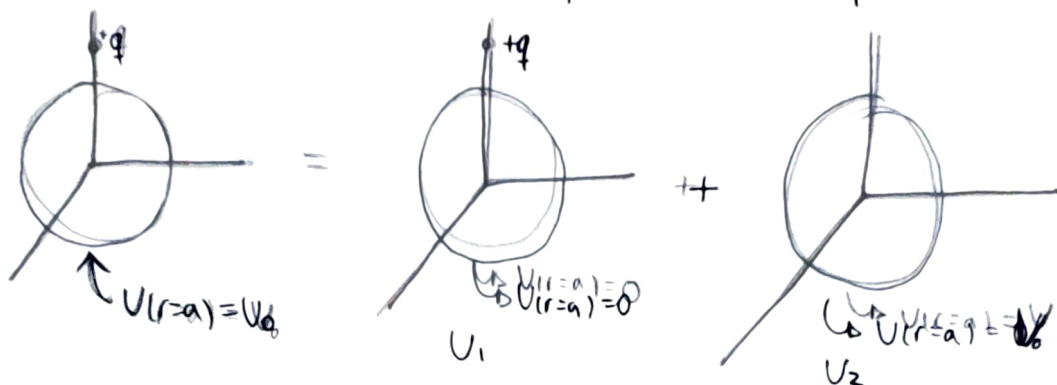
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|r\hat{r} - z_q\hat{z}|} + \frac{\left(-\frac{a}{z_q}q\right)}{\left|r\hat{r} - \frac{a^2}{z_q}\hat{z}\right|} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(r^2 + z_q^2 - 2rz_q\cos\theta)^{1/2}} - \frac{aq}{z_q(r^2 + a^4/z_q^2 - 2ra^2/z_q\cos\theta)^{1/2}} \right] \end{aligned}$$

Y el campo $\vec{E} = -\nabla V$ se puede calcular usando el gradiente en esféricos, siendo el resultado un poco "largo". Evidentemente la carga total de la esfera será $+q' = -\frac{a}{z_q}q$. usando el flujo como antes.

La fuerza que la esfera ejerce sobre la carga será:

$$F = q \cdot \vec{E}_{qq'} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{z}}{(z_q - z_{q'})^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2 \cdot a \cdot z_q}{(z_q - a^2)^2} \hat{z}$$

Si ahora queremos que la esfera este a un potencial V_0 podemos calcular este potencial como la superposición de dos problemas:



Sabiendo resolver ambos problemas por separado. Entonces el potencial para $r > a$ será:

$$V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r})$$

El problema $V_1(\vec{r})$ se resuelve como antes, haciendo que exista una carga q' a una distancia z' . El problema V_2 se resuelve colocando una carga en el centro de la esfera, tal que q'' sea:

$$\epsilon_0 q'' = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}; \quad \vec{E} = \nabla V = \nabla \left(\frac{a \cdot V_0}{r} \right) = \frac{a \cdot V_0}{r^2} \cdot \hat{r} \rightarrow$$

$$q'' = \epsilon_0 \cdot 4\pi \cdot a \cdot V_0$$

Entonces por superposición el potencial del problema será:

$$V(r > a) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|r\hat{r} - z_q\hat{z}|} - \frac{a/z_q \cdot q}{|r\hat{r} - a^2/z_q\hat{z}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(4\pi\epsilon_0 a V_0)}{r} \right]$$

Evidentemente, por las condiciones de contorno, la carga almacenada en la esfera será la suma de q' y q'' . También nos podemos dar en vez del potencial V la carga total Q almacenada en la esfera. Resumiendo los 3 casos:

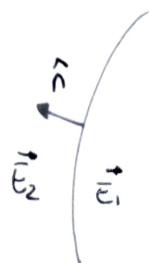
- Caso 1: esfera a potencial 0: $q' = -q \cdot \frac{a}{z_q}$; $z_{q'} = \frac{a^2}{z_q}$
- Caso 2: esfera a potencial V : $q' = -q \cdot \frac{a}{z_q}$; $q'' = 4\pi\epsilon_0 \cdot a \cdot V$
 $z_{q'} = \frac{a^2}{z_q}$
- Caso 3: esfera a carga Q : $q' = -q \cdot \frac{a}{z_q}$; $q'' = Q - q'$
 $z_{q'} = \frac{a^2}{z_q}$

¿Que pasa ahora si la carga q está situada $z_q < a$, es decir, dentro de la corteza esférica? En realidad, no ocurrirá nada, ya que en ningún momento hemos impuesto que dichas soluciones sean para $z_q > a$. lo único que cambia es la carga total encerrada por la esfera (si es el caso 1 y 2) o la carga de q'' (si es el caso 3). En este caso el potencial $r > a$ es trivial, ya que por ser esfera conductora será:

$$V(r > a) = \frac{V \cdot a}{r} \quad \text{y} \quad \vec{E}(r > a) = \frac{V \cdot a}{r^2} \cdot \hat{r}$$

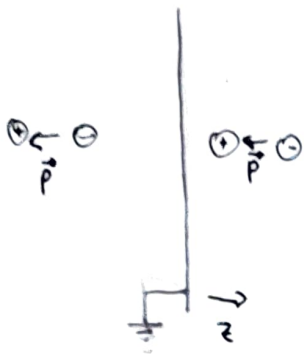
Para calcular la distribución de cargas de la esfera primero debemos calcular $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$ si $r > a$ o $r < a$ (depende de si $z_q > a$ o $z_q < a$) y luego usar la propiedad:

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{n} = \rho_s / \epsilon_0$$

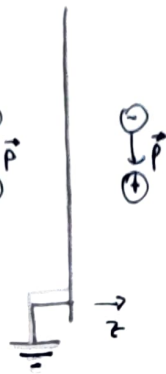


5.3. IMAGEN DE UN DIPOLO:

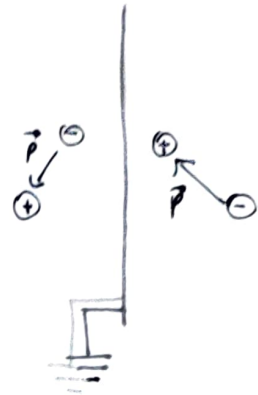
Supongamos un dipolo enfrente de un plano, ¿cuanto vale el potencial en $z > 0$? Dependerá de la posición del dipolo:



1)



2)



3)

No consideramos el caso de una esfera ya que es demasiado complicado

6. SEPARACIÓN DE VARIABLES:

Vamos a estudiar un método para resolver la ec. de Laplace, el método de separación de variables.

El método de separación de variables busca encontrar una solución formada por el producto de funciones formadas ellas por una única coordenada. Por ejemplo, en esféricas:

$$V(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$$

dos soluciones por este método forman un pequeño subconjunto de todas las soluciones posibles. Lo interesante es que todas las posibles soluciones pueden escribirse como combinación lineal de este subconjunto.

6.1. SEPARACIÓN EN ESFÉRICAS:

En esféricas la ecuación de Laplace viene dada por:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

Supongamos que el problema no dependa de φ , es decir, que tenga simetría con el eje z (simetría de rotación). Entonces por separación de variables la solución viene dada por:

$$V(r, \theta) = R(r) \cdot P(\theta)$$

Y el problema:

$$\frac{P}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0$$

Que podemos reescribir como:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{P} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = \lambda$$

do igualamos a una constante porque al ser los dos ecuaciones formados por variables independientes, la única forma que se igualen dichas ecuaciones es que sean una constante ambas.

Primero resolvemos la ec. formada por θ :

$$-\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = \lambda P$$

Si llamamos θ al operador diferencial entonces:

$$\theta \cdot P = \lambda \cdot P$$

Este tipo de ecuación (ecuación de valores propios) solo tiene solución para determinados valores de λ (valores propios). Las funciones solución para cada uno de estos valores se denota con θ_n y se le llama funciones propias.

Buscamos soluciones finitas y continuas en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$. Hagamos el cambio de variable $x = \cos \theta$, $dx = -\sin \theta d\theta$, $-1 \leq x \leq 1$. La ecuación a resolver quedará como:

$$-\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) = \lambda \cdot P$$

Vamos a demostrar que la solución tiene relación con los polinomios de Legendre.

Buscamos soluciones polinómicas. En el caso $-1 \leq x \leq +1$ solo aparecen términos positivos. Empezamos:

$$P_0(x) = A_0 \text{ es solución con } \lambda = 0$$

$$P_1(x) = A_1 x \text{ es solución con } \lambda = 2$$

$$-\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dA_0}{dx} \right) = 0 = 0 \cdot A_0 \rightarrow \text{Se verifica}$$

$$-\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d(x \cdot A_1)}{dx} \right) = 2x A_1 \rightarrow \text{Se verifica.}$$

Si consideramos el caso $P_2(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$ como solución:

$$-\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_2}{dx} \right] = \lambda \cdot P_2(x) \rightarrow 6A_2 x^2 + 2x A_1 - 2A_2 = \lambda [A_2 x^2 + A_1 x + A_0]$$

Si hacemos $\lambda = 6$; $A_1 = 0$, $A_2 = -3A_0 \Rightarrow A_0 = -\frac{1}{3}A_2$; $P_2 = A_2(x^2 - 1/3)$ es

función propia con $\lambda = 6$. Queda una constante por determinar. En general:

$$P_L = A_L \cdot x^L + \text{términos bajo orden}$$

Obtenemos que:

$$\Theta \cdot P_L = A_L \cdot l \cdot (l+1) x^L + \text{términos bajo orden.}$$

Es posible añadir términos de orden más bajo para conseguir una

función propia de autovalores $\ell(\ell+1)$. dos constantes A_0, A_1, \dots se eligen de tal forma que $P_\ell(x \neq 1) = 1$. Así obtenemos los polinomios de Legendre.

Entonces la solución vendrá dada por

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \cdot \frac{d^\ell}{dx^\ell} [(x^2 - 1)^\ell]$$

que verificarán la ecuación

$$-\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_\ell}{dx} \right] = \ell \cdot (\ell + 1) P_\ell(x)$$

dos más importantes son:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

⋮

Entonces para la ecuación de Laplace con $\cos(\theta) = x$ tenemos que:

$$P_0(\cos \theta) = 1; \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta; \quad P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

Algunas propiedades de los polinomios de Legendre:

1) Son ortogonales. Si hacemos el producto interior nos dará la función delta de Kronecker (1 si $m=n$; 0 si $m \neq n$):

$$\int P_m(x) P_n(x) dx = \delta_{nm}$$

2) Por ser linealmente independientes si $\sum C_\ell P_\ell(\cos \theta) = 0 \quad C_\ell = 0 \forall \ell$.

3) Si $\sum C_\ell P_\ell(\cos \theta) = \sum D_\ell P_\ell(\cos(\theta)) \Rightarrow D_\ell = C_\ell$

4) Si consideramos el eje z como región de interés; es decir, consideramos los valores $\cos \theta = \pm 1$, tenemos que los únicos soluciones posibles son (junto) los polinomios de Legendre, por lo que a pesar de ser una E.D. de 2° orden solo hay una solución genérica.

Ahora tenemos que resolver la ecuación $R(r)$:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \cdot \frac{dR}{dr} \right) = \ell \cdot (\ell + 1) R$$

La solución viene dada en forma de polinomios $R = \alpha \cdot r^n$:

$$\frac{d}{dr}(r^2 \alpha n \cdot r^{n-1}) = n \cdot (n+1) \cdot \alpha r^n = l \cdot (l+1) \alpha r^n$$

Por lo tanto: $n \cdot (n+1) = l \cdot (l+1)$. Resolvemos:

$$n^2 + n - l^2 - l = 0 \rightarrow n = l, -(l+1)$$

Entonces la solución será:

$$R_l(r) = \left(A_l \cdot r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right)$$

Y el potencial vendrá dado por:

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l \cdot r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos(\theta))$$

El valor de los términos A_l y B_l vendrán dados por los C.C. del ejercicio / problema.

Veamos varios ejemplos:

• Ejemplo 1: supongamos que tenemos una superficie esférica de radio R a potencial $V(R, \theta) = k \sin^2(\theta/2)$. No hay carga ni dentro ni fuera de la esfera. Calcular el potencial en todo punto del espacio. Entonces podemos reescribir V :

$$V(R, \theta) = k \sin^2(\theta/2) = \frac{k}{2}(1 - \cos \theta) = \frac{k}{2} P_0(\cos(\theta)) - \frac{k}{2} P_1(\cos(\theta))$$

El potencial dentro verifica que: $\nabla^2 V_d = 0$, $r < R$.

$$V_d = \sum \left(A_L \cdot r^L + \frac{B_L}{r^{L+1}} \right) P_L(\cos \theta)$$

Como debe ser finita en $r=0$; $B_L = 0 \forall L \Rightarrow$

$$V_d = \sum A_L \cdot r^L \cdot P_L(\cos(\theta))$$

Como debe ser continua en $r \rightarrow R$:

$$V_d(r=R) = V(R, \theta)$$

Por tanto:

$$A_0 \cdot R^0 \cdot P_0(\cos(\theta)) = \frac{k}{2} P_0(\cos(\theta)) \rightarrow A_0 = k/2$$

$$A_1 \cdot R^1 P_1(\cos(\theta)) = -\frac{k}{2} P_1(\cos(\theta)) \rightarrow A_1 = -k/2R$$

Y para A_L $L > 1$ tenemos que $A_L = 0$. Ahora estudiemos el potencial para $r > R$.

El potencial para $r > R$ verifica que $\nabla V_f = 0$; y como $V_f(\infty) = 0$ tenemos que $\tilde{A}_l = 0 \forall l$. Por lo tanto:

$$V_f = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tilde{B}_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Entonces tenemos que $V_f(R, \theta) = V(R, \theta)$; y:

$$\sum_l \frac{\tilde{B}_l}{R^{l+1}} P_l(\cos(\theta)) = \frac{\kappa}{2} P_0(\cos(\theta)) - \frac{\kappa}{2} P_2(\cos(\theta))$$

Entonces obtenemos los términos:

$$\frac{\tilde{B}_0}{R} P_0(\cos(\theta)) = \frac{\kappa}{2} P_0(\cos(\theta)) \rightarrow \tilde{B}_0 = \frac{\kappa \cdot R}{2}$$

$$\frac{\tilde{B}_1}{R^2} P_1(\cos(\theta)) = -\frac{\kappa}{2} P_1(\cos(\theta)) \rightarrow \tilde{B}_1 = \frac{-\kappa \cdot R^2}{2}$$

y $\tilde{B}_l = 0$ si $l > 1$. El potencial buscado entonces:

$$\begin{aligned} V_f &= \frac{\kappa \cdot R}{2} \cdot \left(\frac{1}{r} P_0(\cos(\theta)) - \frac{R}{r^2} P_1(\cos(\theta)) \right) = \\ &= \frac{\kappa \cdot R}{2r} \cdot \left(1 - \frac{R}{r} \cos(\theta) \right) \end{aligned}$$

• Ejemplo 2: una superficie esférica de radio R . En ella hay una densidad de carga superficial $\rho_s = \rho_0 \cdot \cos(\theta)$. Calcular el potencial y campo en todo punto del espacio

El potencial dentro y fuera satisfacen la ec. de Laplace:

$$\nabla^2 V_d = 0 ; \nabla^2 V_f = 0$$

dos condiciones de frontera son:

$$1) V_d|_R = V_f|_R$$

$$2) V_f(\infty) = 0 ; V_d(r=0) \text{ finito}$$

$$3) \hat{r} \cdot (\vec{E}_f - \vec{E}_d) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 \cos(\theta)}{\epsilon_0} = \rho_0 \cdot \epsilon_0^{-1} \cdot P_1(\cos(\theta)) \quad r=R$$

Por la condición 2):

$$\bullet V_f = \sum_{l=0}^{\infty} r^{-l-1} \cdot B_l P_l(\cos(\theta))$$

$$\bullet V_d = \sum_l A_l \cdot r^l P_l(\cos(\theta))$$

Estudiamos la condición 3:

$$\bullet \hat{r} \cdot \vec{E}_f = -\hat{r} \cdot \nabla V_f = \sum_l (l-1) \cdot r^{-l-2} \cdot B_l P_l(\cos(\theta))$$

$$\bullet \hat{r} \cdot \vec{E}_d = \hat{r} \cdot \nabla V_d = \sum_l l A_l \cdot r^{l-1} P_l(\cos(\theta))$$

Entonces por la condición 1):

$$\sum A_L \cdot R^L \cdot \cos_L(\theta) = \sum B_L \cdot R^{-L-1} \cdot \cos_L(\theta) \rightarrow$$

$$A_L \cdot R^L = B_L \cdot R^{-L-1} \Rightarrow B_L = A_L \cdot R^{2L+1}$$

Y podemos substituirlo en la condición 3):

$$\sum P_L(\cos(\theta)) \cdot [-L \cdot A_L \cdot R^{L-1} - (L+1) R^{-L-2} B_L] = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot P_1(\cos(\theta)) \Rightarrow$$

$$\sum P_L(\cos(\theta)) \cdot [-L \cdot A_L \cdot R^{L-1} - (L+1) \cdot R^{-L-2} \cdot R^{2L+1} A_L] = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} P_1(\cos(\theta)) \Rightarrow$$

$$-\sum P_L(\cos(\theta)) \cdot [R^{L-1} \cdot A_L \cdot (2L+1)] = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} P_1(\cos(\theta))$$

Entonces, obviamente:

- Si $l=1$: $A_1 \cdot 3 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \Rightarrow A_1 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \cdot 3}$

- Si $l \neq 1$: $A_l = 0$

Por lo que:

- Si $l=1$: $B_1 = \frac{\rho_0 \cdot R^3}{\epsilon_0 \cdot 3}$

- Si $l \neq 1$: $B_l = 0$

El potencial vendrá dado por:

$$V_d = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \cos(\theta) \quad V_j = \frac{\rho_0 \cdot R^3}{3\epsilon_0 r^2} \cos(\theta)$$

Y los campos:

$$\vec{E}_d = -\nabla V_d = -\nabla \cdot \left(\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot z \right) = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot \hat{z}$$

$z = r \cos \theta$

• $\vec{E}_f = -\nabla V_f$. Como el potencial se parece mucho al del dipolo (aparece un coseno de θ , un r^2 abajo...) podemos reescribir:

$$V_f = \frac{\rho_0 R^3}{\epsilon_0 \cdot 3 r^3} \cdot \cos(\theta) \quad \text{con} \quad V_f = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\vec{p} = \frac{4\pi\epsilon_0 \rho_0}{3} \hat{p}$$

Entonces \vec{E}_f vendrá dado por

$$\vec{E}_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left[3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p} \right]$$

- Ejemplo 3: supongamos una esfera uniformemente polarizada $\vec{P} = P \cdot \hat{z}$. Calcula el potencial y los campos \vec{D} y \vec{E} en todo el espacio. Las ecuaciones que se tienen que resolver son:

$$r < R \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D}_d = 0 \\ \vec{E}_d = -\nabla V_d \\ \nabla \cdot \vec{E}_d = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{D}_d - \vec{P}}{\epsilon_0} \right) = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0 \end{cases}$$

$$r > R \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D}_f = 0 \rightarrow \epsilon_0 \cdot \nabla \cdot \vec{E}_f = 0 \\ \vec{E}_f = -\nabla V_f \\ \nabla^2 V = 0 \end{cases}$$

dos condiciones de frontera serán:

1) $V(\infty) = 0$, $V(r=0)$ finito.

2) $V_d(R) = V_f(R)$ (continuidad)

3) $\hat{r} \cdot (\vec{D}_f - \vec{D}_d) = 0 \rightarrow \hat{r} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_f - \epsilon_0 \vec{E}_d - \vec{P}) = 0 \rightarrow$

$$\hat{r} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_f - \epsilon_0 \vec{E}_d) = \cos(\theta) \cdot P = P \cdot P_r(\cos(\theta))$$

Hacemos lo mismo que en el ejemplo 2:

Para que se cumpla la condición 1; 2 y 3 (que son las mismas que en el ejemplo 2 salvo por la 3, que cambia en una constante):

$$1) \Rightarrow V_d = \sum_{\ell} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos(\theta)); \quad V_f = \sum_{\ell} B_{\ell} r^{-\ell-1} P_{\ell}(\cos(\theta))$$

$$2 \text{ y } 3) \Rightarrow V_d = A_1 r \cos(\theta); \quad V_f = B_1 r^{-2} \cos(\theta) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_1 \cdot R = B_1 \cdot R^{-2} \rightarrow A_1 \cdot R^3 = B_1 \quad \text{y} \quad A_1 = B_1 \cdot R^{-3} & 2) \\ +2 \cdot B_1 \cdot R^{-3} + A_1 = P & 3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{+P}{3\epsilon_0} \Rightarrow B_1 = \frac{P \cdot R^3}{3\epsilon_0}$$

Entonces:

$$V_d = \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos(\theta) = \frac{P}{3\epsilon_0} z$$

$$V_f = \frac{P \cdot R^3}{\epsilon_0 r^2 \cdot 3} \cdot \cos(\theta) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Y por lo tanto

$$\vec{E}_d = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{z}$$

$$\vec{E}_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{p}]}{r^3} \quad \text{con} \quad \vec{p} = \frac{P \cdot R^3 \cdot 4 \cdot \pi}{3} \cdot \hat{z}$$

x \vec{D} :

$$\vec{D}_d = +\frac{2}{3} \frac{\hat{z}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{D}_f = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{[3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{p}]}{r^3}$$

• Ejemplo 4: supongase una esfera conductora de radio a en un campo externo $\vec{E} = E_0 \hat{z}$. Calcule el potencial y campo en las situaciones siguientes:

- la esfera está a potencial V_0
- la esfera tiene carga Q
- la esfera está conectada a tierra ($V_0 = 0$)



Como $V = \int_{-\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_0 \cdot z = -E_0 \cdot r \cdot \cos(\theta)$. Además se generará un potencial por la presencia de la esfera conductora tal que:

$$V = -E_0 \cdot r \cdot \cos(\theta) + \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos(\theta))$$

Equivalentemente:

$$V = \frac{B_0}{r} P_0(\cos(\theta)) + \left(\frac{B_1}{r^2} - E_0 \cdot r \right) P_1(\cos(\theta)) + \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos(\theta))$$

Como la esfera está a potencial $V(r=a) = V_0$ tendremos que:

$$\frac{B_0}{a} P_0(\cos(\theta)) = V_0 \rightarrow B_0 = V_0 \cdot a ;$$

$$-\epsilon_0 a + \frac{B_1}{a^2} = 0 \rightarrow B_1 = \epsilon_0 \cdot a^3 ; B_2 = 0 \text{ ni } l > 1.$$

Entonces el potencial:

$$V = \frac{V_0 \cdot a}{r} + \left(-\epsilon_0 r + \frac{\epsilon_0 \cdot a^3}{r^2} \right) \cos(\theta)$$

Y el campo electrico, con el debido cambio:

$$\vec{E} = \frac{V \cdot a}{r^2} \cdot \hat{r} + \epsilon_0 \cdot \hat{z} + \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \quad \vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \cdot a^3 \cdot \vec{E}_0$$

Calculamos la carga almacenada en la esfera:

$$\hat{r} \cdot (\vec{E}_j - \vec{E}_0) \Big|_{r=a} = \rho_s / \epsilon_0 \rightarrow \rho_s = -\epsilon_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

$$\rho_s = -\epsilon_0 \cdot \left(-\frac{V \cdot a}{r^2} + \left(-\epsilon_0 + \frac{\epsilon_0 \cdot a^3 \cdot 2}{r^3} \right) \cdot \cos(\theta) \right) \Big|_{r=a}$$

$$\rho_s = \frac{\epsilon_0 \cdot V}{a} + 3\epsilon_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \cos(\theta)$$

$$Q = \int \rho_s dS = \frac{\epsilon_0 \cdot V}{a} \cdot 4\pi a^2 = \epsilon_0 \cdot 4\pi a V$$

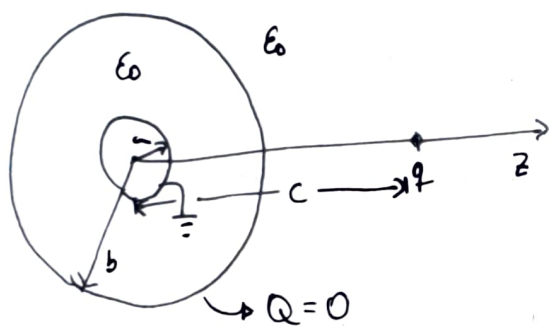
$$\hookrightarrow \int 3\epsilon_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \cos(\theta) dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) d\theta d\phi \cdot K = 0$$

Entonces para resolver b) solo habria que cambiar $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a}$

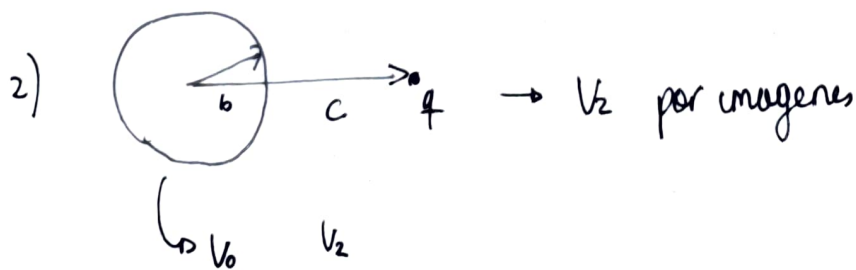
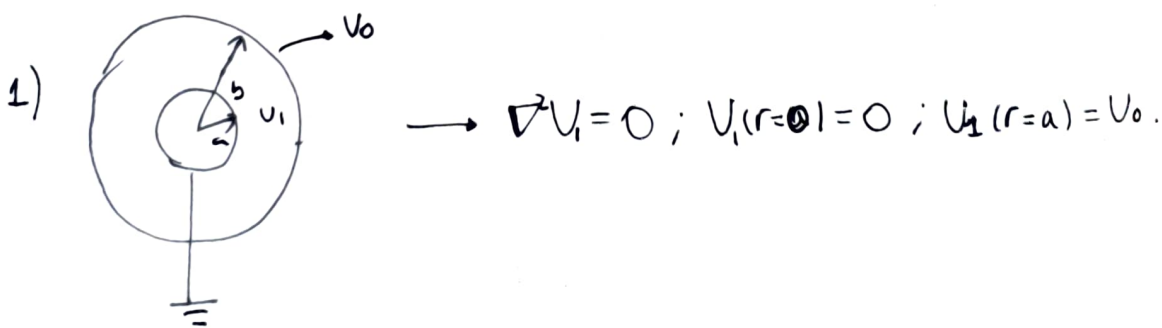
Para c) hay que escribir $V_0 = 0$.

NO ES DE ESTE TEMA! (Importante igual)

• Ejemplo 5: molículo: En este ejemplo usaremos imágenes y desplazamiento. Se dispone de una esfera metálica de radio a conectada a Tierra. Rodeado de esta esfera, se encuentra una delgada cortera esférica también metálica de radio b . Esta cortera está aislada y descargada. En el exterior de esta esfera conductora se encuentra una carga puntual q situada a una distancia c del centro de las esferas. Calcular la fuerza sobre q .



Podemos dividir el problema en 2 problemas:



• Problema 1: lo resolvemos por la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 V_1(r) = 0 \rightarrow V_1(r) = \frac{A}{r} + B \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1/a & -1 \\ 1/b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -V_0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Kramer} \rightarrow$$

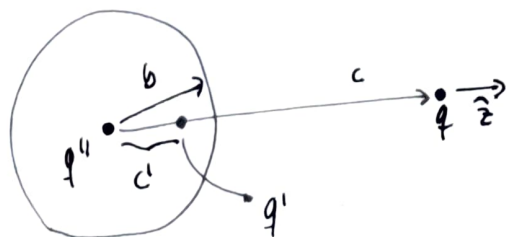
$$A = \frac{V_0 \cdot}{1/a - 1/b} = -\frac{V_0 \cdot a}{b - a}$$

$$B = \frac{V_0/a}{1/a - 1/b} = +\frac{V_0 \cdot b}{b - a}$$

$$V_1 = \frac{V_0 \cdot b}{b - a} \cdot \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{V_0 \cdot b \cdot a}{(b - a)} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}$$

• Problema 2: usamos los formularios que hemos visto en el tema anterior: Tenemos que este problema se puede resolver suponiendo la existencia de dos cargas q' y q'' tal que:



$$q' = -\frac{b}{c} \cdot q$$

$$c = \frac{b^2}{c}$$

$$q'' = V_0 \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot b$$

Entonces tenemos que:

$$V_2 = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r}-c\hat{z}|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-b/c \cdot q}{|\vec{r}-b^2/c\hat{z}|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot V_0 \cdot b}{|\vec{r}|} \right]$$

Entonces el potencial V_0 que tenemos determinado ahora podemos definirlo en función de q , ya que como la esfera $r=b$ está descargada:

$$\oint_{a < r < b} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \oint_{b < r < c} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} \rightarrow -\frac{V_0 \cdot b \cdot a}{(b-a)} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q' + q''}{\epsilon_0} \rightarrow$$

$$-\frac{V_0 \cdot b \cdot a}{(b-a)} \cdot 4\pi = \frac{-b/c \cdot q + V_0 \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot b}{\epsilon_0} \rightarrow$$

$$V_0 \cdot \left(\frac{b \cdot a}{b-a} \cdot 4\pi + 4\pi \cdot b \right) = \frac{b}{c} \cdot \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow$$

$$V_0 = \frac{(b-a)}{b} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow V_0 = \frac{q \cdot (b-a)}{4\pi\epsilon_0 \cdot b \cdot c}$$

Entonces la fuerza ejercida sobre q será igual a la fuerza ejercida por q' y q'' . Entonces:

$$\vec{F}_q = \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(-b/c \cdot q)}{(c-b^2/c)^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot (b-a)}{c \cdot (c)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{F}_q = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{(b-a)}{c^3} - \frac{b \cdot c}{(c^2-b^2)^2} \right] \hat{z}$$

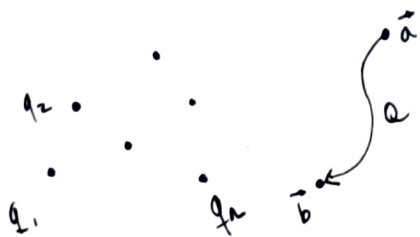
7. FUERZA Y ENERGÍA

7.1. TRABAJO AL MOVER UNA CARGA

Supongamos una configuración estacionaria de cargas q_1, q_2, \dots, q_n . Si queremos llevar una carga Q de un punto \vec{a} a un punto \vec{b} el trabajo realizado será:

$$W = \int_a^b \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b Q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} = + Q \cdot \int_a^b \nabla V dl = Q [V(\vec{b}) - V(\vec{a})]$$

Probablemente te preguntes porque $F_{\text{ext}} = -Q \cdot \vec{E}$. Es porque la fuerza eléctrica en cada momento del recorrido es $F = Q \cdot \vec{E}$; entonces para vencerla necesitas ejercer una fuerza igual pero de sentido contrario. También puedes ejercer una fuerza mayor, pero aparecerá una E_c .



Como podemos ver W es independiente del camino recorrido, ya que es la diferencia entre energía potencial ($Q \cdot V$) entre \vec{a} y \vec{b} .

Si nuestra carga Q viene del infinito, como $V(\infty) = 0$ (en general), tenemos que entonces:

$$W^{\text{ext}} = - \int_{\infty}^{\vec{r}} Q \cdot \vec{E} d\vec{\ell} = Q \cdot V(\vec{r})$$

7.2. ENERGÍA DE UNA DISTRIBUCIÓN

¿Cuanto trabajo se necesita para crear una disposición de cargas puntuales? Imaginemos que traemos los cargas del infinito una por una.

Evidentemente traer la primera carga no cuesta trabajo, ya que no hay ningún campo que contrarrestar. Para la carga 2:

$$W_2 = q_2 \cdot \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right]$$

Siendo \vec{r}_1 la posición de q_1 y \vec{r}_2 la de q_2 . Para la carga n -ésima:

$$W_n = q_n \cdot \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_n|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_n|} + (\dots) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{n-1}}{|\vec{r}_{n-1} - \vec{r}_n|} \right]$$

Entonces el trabajo total:

$$W = W_1 + (\dots) + W_n = \frac{1}{2} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \frac{q_i q_j}{R_{ij}} \right] \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Si llamamos $V(\vec{r}_i)$ al potencial en el punto \vec{r}_i debido a los demás cargas $(1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$ tenemos que:

$$U_e = W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \cdot V(\vec{r}_i) \quad V(\vec{r}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}$$

llamamos al trabajo para crear esta configuración de cargas la energía electrostática. Si la distribución de cargas es continua tenemos que:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \rho_v \cdot V \, dV = \frac{1}{2} \int_{\text{universo}} \rho_v \cdot V \, dV$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_S \rho_s \cdot V \, dS = \frac{1}{2} \int_{\text{universo}} \rho_s \cdot V \, dS$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_L \rho_L \cdot V \, dL = \frac{1}{2} \int_{\text{universo}} \rho_L \cdot V \, dL$$

CONDUCTORES:

En un conductor la carga está situada en la superficie y el potencial es constante (en toda su superficie). Por lo tanto:

$$U_{e,i} = \frac{1}{2} \int_S \rho_s V_i \, dS = \frac{1}{2} V_i \int_S \rho_s \, dS = \frac{1}{2} V_i \cdot Q_i$$

Y la energía total del sistema de conductores:

$$U_e = \sum_{i=1}^n U_{e,i} = \frac{1}{2} \sum Q_i \cdot V_i$$

Como hemos visto, las cargas y potenciales están relacionados entre sí por los coeficientes de potencial (P_{ij}) o de capacidad (C_{ij}):

$$V_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} Q_j ; Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j$$

Entonces la energía del sistema:

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i,j} P_{ij} Q_i Q_j = \frac{1}{2} \sum C_{ij} V_i V_j$$

Estos resultados son más llamativos en los casos de un conductor aislado o un condensador, donde podemos compactar el término:

• Conductor aislado: $C = \frac{Q}{V} \rightarrow U_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

• Condensador: $C = \frac{Q}{\Delta V}$; $U_e = \frac{1}{2} \sum V_i Q_i = \frac{1}{2} V_+ Q + \frac{1}{2} V_- (-Q) \rightarrow$

$$U_e = \frac{1}{2} Q \cdot (V_+ - V_-) = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

Además de calcular la energía de una distribución mediante los potenciales podemos calcular la energía en función de \vec{E}

7.3. ENERGÍA A PARTIR DE \vec{E}

Sabemos que: $U_e = \frac{1}{2} \int_{\text{univ}} V dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot V dV$
 $\hookrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

Y podemos despejar: $(\nabla \cdot \vec{E}) \cdot V = \nabla \cdot (V \vec{E}) - \vec{E} \cdot \underbrace{\nabla V}_{-\vec{E}} = \vec{E}^2 + \nabla \cdot (\vec{E} V)$

Entonces: $U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{univ}} \vec{E}^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{univ}} \nabla \cdot (V \vec{E}) dV =$
 $= \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{S_0} V \cdot \vec{E} d\vec{S}$

Dado que en el peor de los casos (componentes monopulares) tenemos que: $V \propto \frac{1}{r}$ y $E \propto \frac{1}{r^2}$ $dS \propto r^2$ y $r \rightarrow \infty$

Tenemos que el segundo término tiende a cero. Entonces:

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{univ}} (\vec{E})^2 dV$$

7.4. INCONSISTENCIAS

Superpongamos dos cargas (q_1, \vec{r}_1) y (q_2, \vec{r}_2) , la energía de la distribución:

$$\bullet U_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{\epsilon_0} \rightarrow \text{Puede ser negativo 1)}$$

$$\bullet U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 dV; \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \rightarrow \text{Sólo puede ser positivo 2)}$$

Uno podría pensar que una de las dos formas de obtener la energía es incorrecta, pero en realidad los dos lo son. La primera ecuación 1) no tiene en consideración la energía necesaria para crear las cargas. Lo único que evalúa es la energía necesaria para juntarlas. Esta forma de calcularlo no tiene en cuenta la autoenergía (energía de una carga puntual), que es infinita:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^4} \cdot r^2 \sin\theta d\theta dr = \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} dr = +\infty \end{aligned}$$

La ecuación 2 incluye los autoenergías, es decir, es más completa. Si somos capaces de eliminar los autoenergías de 2) tanto 1) como 2) son equivalentes.

la energía no satisface el principio de superposición, ya que:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \text{ no implica } U_e = U_{e1} + U_{e2} \rightarrow$$

$$U_e = U_{e1} + U_{e2} + \underbrace{\epsilon_0 \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV}_{\text{término cruzado}}$$

Otra inconsistencia a parte de estas dos es encontrar donde está la energía almacenada. la ecuación 1) sugiere que se encuentran almacenados en los campos y 2) en los campos. En la electrostática no podemos distinguirlo; en la electrodinámica es conveniente pensar que está en los campos.

• Ejemplo 7.4.1: vamos a calcular la energía de una esfera de radio a con densidad ρ_v constante:

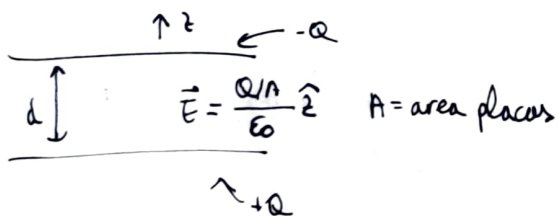
$$a) \text{ En función del potencial: } \rho_v = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}; \quad V = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } U_e &= \int \rho_v \cdot V dV = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) 4\pi r^2 dr = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{a^3} \cdot \frac{1}{8\pi\epsilon_0 a} \cdot Q^2 a^3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a} \end{aligned}$$

b) En función de los campos: $U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 dV$

$$\begin{aligned}
 U_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^a \frac{Q^2 r^2}{(4\pi)^2 a^6 \epsilon_0^2} 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty \frac{Q^2}{(4\pi)^2 r^4} 4\pi r^2 dr \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{a^5 \cdot Q^2}{(4\pi)^2 \cdot 5 \cdot a^6 \cdot \epsilon_0^2} \cdot 4\pi + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2 \cdot 4\pi}{(4\pi)^2 \cdot a} = \\
 &= \frac{Q^2}{(4\pi) \epsilon_0 \cdot a} \left(\frac{1}{10} + \frac{5}{10} \right) = \frac{Q^2 \cdot 3}{4\pi \epsilon_0 \cdot a \cdot 5}
 \end{aligned}$$

• Ejemplo 7.4.2: energía electrostática de un condensador de placas plano-paralelas:



$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 dV = \frac{\epsilon_0 \cdot Q^2}{2 \epsilon_0^2 A^2} \cdot A \cdot d$$

$$U_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \rightarrow C^{-1} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 d}{A}$$

Definición

7.5. FUERZAS ENTRE CONDUCTORES

Ya hemos visto que la fuerza que se ejerce sobre un conductor:

$$\vec{F} = \int \frac{\rho_s^2}{2 \epsilon_0} d\vec{S}$$

Ahora trataremos de entender las fuerzas electrostáticas a partir de la energía. Para esto usaremos el principio de los trabajos puntuales.

Sabemos que la variación de la energía cinética es igual al trabajo realizado por todas las fuerzas:

$$\Delta T = W_e + W_g + W_m$$

- $W_e \equiv$ Trabajo realizado por fuerzas electrostáticas. Como son conservativas se puede escribir como $W_e = -\Delta U_e$
- $W_g \equiv$ Trabajo realizado por generadores para mantener $V = \text{cte}$; para lo cual es necesario bombear carga. Entonces $W_g = U_i \cdot \Delta q_i$
- $W_m \equiv$ Trabajo realizados por fuerzas externas, como fuerzas mecánicas. Si son conservativas: $W_m = -\Delta U_m$

Si consideramos un proceso virtual donde desplazamos un conductor dx (por ejemplo varcamos la distancia entre las placas en un condensador plano-paralelo), tenemos que $\Delta T = 0$ (la posición es de equilibrio)

Como $\vec{F}_e = \vec{F}_m$ (piezas en reposo) podemos distinguir dos casos:

- Proceso a carga constante: como $q_i = \text{cte}$ $\delta W_g = 0$ entonces:

$$\delta T = 0 = -\delta U_e - F_{ex} \delta x \rightarrow$$

$$F_{ex} = - \left. \frac{\partial U_e}{\partial x} \right|_{q_i = \text{cte}}$$

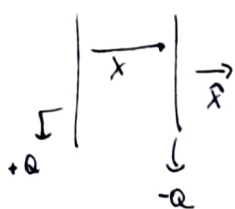
- Proceso a potencial constante: en este caso $\delta W_g = \sum V_i \delta q_i$; pero como esto es $\delta W_g = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \sum V_i \delta q_i \right) = 2 \cdot \delta U_e$

$$\delta T = 0 = -\delta U_e + 2 \delta U_e - F_{ex} \delta x \rightarrow F_{ex} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial x} \right|_{V_i = \text{cte}}$$

También puede haber procesos mixtos.

- Ejemplo 7.5.1: fuerzas entre los platos de un condensador plano paralelo. Calculamos a $Q = \text{cte}$ y $\Delta V = \text{cte}$

$$\bullet Q = \text{cte} \Rightarrow U_e = E^2 \cdot \frac{\epsilon_0}{2} = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \frac{(Q^2/A^2)}{\epsilon_0^2} \cdot A \cdot x = \frac{Q^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{A}$$



$$F_e = - \left. \frac{\partial U_e}{\partial x} \right|_{Q = \text{cte}} \rightarrow F_e = - \frac{Q^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{A}$$

$$\bullet \Delta V = \text{cte} \Rightarrow U_e = \frac{1}{2} C \cdot (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \cdot A}{x} (\Delta V)^2 \rightarrow F_e = \left. \frac{\partial U_e}{\partial x} \right|_{V = \text{cte}} = - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \cdot A}{x^2} (\Delta V)^2$$

Como $\Delta V = \frac{Q}{C}$ y $C = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{x}$ se verifica para ambos el mismo valor

7.6. ENERGÍA CON DIELECTRICOS:

El problema de la energía electrostática en un medio material es mucho más complicado, ya que aparece una polarización al establecer un campo \vec{E} . Este proceso consume energía; y en determinados materiales, este proceso es disipativo, no pudiendo recuperar la energía al eliminar el campo.

Incluso para un medio no dispersivo puede ocurrir que la relación entre \vec{D} y \vec{E} con \vec{E} sea tan complicada que no se pueda determinar la energía. Solo para materiales lineales se puede efectuar un análisis similar al ya visto.

Para hallar la energía electrostática evaluaremos el trabajo para modificar la carga libre del sistema, trayendo elementos δq .

En un instante del proceso, el sistema tiene una densidad de carga libre ρ tal que:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

La variación de densidad al variar δq será $\delta \rho$ tal que

$$\int \delta \rho \, dV = \delta q$$

Y la variación de $\vec{D} \Rightarrow \nabla \cdot (\vec{D} + \delta \vec{D}) = \rho + \delta \rho \rightarrow \nabla \cdot (\delta \vec{D}) = \delta \rho$

Y por lo tanto la variación de energía del sistema:

$$\begin{aligned} \delta U_e &= \int V \delta \rho dV = \int V \nabla \cdot (\delta \vec{D}) dV = \\ &= \int \nabla \cdot (V \cdot \delta \vec{D}) dV - \int \nabla V \cdot \delta \vec{D} dV \\ &= \int \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV \end{aligned}$$

Usando el argumento anterior

Entonces el trabajo total:

$$U_e = \int_{\text{universo}} \left[\int_{(0,0)}^{(\vec{E}, \vec{D})} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \right] dV$$

Primero hallaremos el valor de la primera integral. Como se presupone que es un medio lineal, homogéneo e isotrópico, tenemos que $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$ y:

$$\vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \vec{E} \cdot \epsilon \cdot \delta \vec{E} = \delta \left[\frac{1}{2} \epsilon \cdot \vec{E}^2 \right] = \delta \left[\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \right] \rightarrow$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\text{universo}} \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

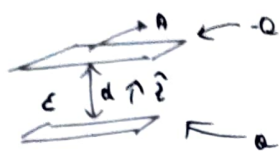
Una expresión alternativa, conveniente para condensadores con dieléctricos.

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_{\text{univ}} \vec{E} \cdot \vec{D} dV = -\frac{1}{2} \int \nabla V \cdot \vec{D} dV = -\frac{1}{2} \int \nabla \cdot (V \cdot \vec{D}) dV + \frac{1}{2} \int V \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) dV \\ &= -\frac{1}{2} \int V \cdot \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int V \rho_v dV = \frac{1}{2} \int V \rho_v dV \end{aligned}$$

En el cálculo de U_e para condensadores en presencia de dieléctricos lineales tenemos que:

$$U_e = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

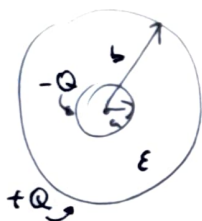
• Ejemplo 7.6.1: energía almacenada en un condensador plano paralelo.



$$C = \frac{\epsilon \cdot A}{d} ; \vec{D} = \frac{Q}{A} \hat{z} ; \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon \cdot A} \hat{z}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{Q^2}{\epsilon^2 A^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot d \cdot A = \frac{Q^2}{2} \cdot \left(\frac{d}{\epsilon \cdot A} \right) = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{1}{C}$$

• Ejemplo 7.6.2: energía almacenada en un conductor esférico.



$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$a < r < b$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{Q^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \cdot 4\pi \int_a^b \frac{1}{r^4} \cdot r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$U_e = \frac{1}{2} Q^2 \cdot (C^{-1})$$

La diferencia entre ambas expresiones $U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 dV$ y $U_e = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} dV$ es que en un caso parte de la energía se invierte en polarizar el sistema.

7.7. FUERZAS SOBRE DIELECTRICOS:

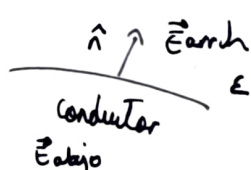
Una vez discutida la definición de energía aplicaremos el mismo principio de trabajos virtuales. En este caso:

$$F_e = - \left. \frac{dU_e}{dx} \right|_{Q=cte}$$

$$F_e = \left. \frac{dU_e}{dx} \right|_{\psi=cte}$$

• Ejemplo 7.7.1: ¿Como se modifica la expresión $\vec{F} = \int \frac{\rho_s^2}{\epsilon_0 \cdot 2} d\vec{S}$ para el caso en el que hay un medio dieléctrico l.h.i con ϵ ? Como sabemos la fuerza:

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \int \rho_s \cdot (\vec{E}_{arrriba} + \vec{E}_{abajo}) dS$$



Esta da lo que $\vec{E}_{abajo} = 0$ y $\vec{E}_{arrriba} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \cdot \hat{n}$;

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \int \rho_s \cdot \frac{\rho_s}{\epsilon} \cdot \hat{n} \cdot dS = \int \frac{\rho_s^2}{2\epsilon} \cdot d\vec{S}$$

Este resultado puede obtenerse por medios energéticos. Supongamos que un trozo muy pequeño de S recibe un desplazamiento Δx con dirección \hat{n} .

En ese caso:

$$\Delta U_e = - \epsilon \cdot \frac{E^2}{2} \Delta S \Delta x = - \epsilon \cdot \frac{\rho_s^2}{\epsilon^2} \cdot \frac{1}{2} \Delta S \Delta x = - \frac{\rho_s^2}{2\epsilon} \Delta S \Delta x$$

Como: $\Delta F_e = - \frac{\Delta U_e}{\Delta x} = \frac{\rho_s^2}{2\epsilon} \Delta S$ y $\vec{F} = \int \frac{\rho_s^2}{2\epsilon} d\vec{S}$ (integrando en S')

- Ejemplo 7.7.2: Fuerza neta en la superficie de separación de dos dieléctricos.

Un desplazamiento virtual paralelo a la superficie de separación de los no va acompañado de cambios en la energía electrostática, ya que el sistema es el mismo que antes. Concretamente, la componente tangencial de la fuerza es nula. La componente normal de la fuerza depende de la dirección de \vec{E} a ambos lados de la superficie.

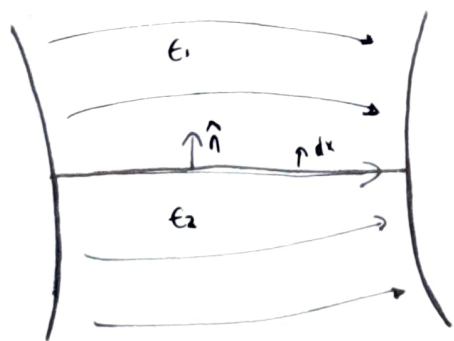
Supongamos que la frontera de separación de ϵ_1 y ϵ_2 es tangente a los líneas de \vec{E} . Si suponemos un desplazamiento dx de la superficie de separación entre los dieléctricos, debido a las condiciones de frontera:

$$E_{\epsilon_1} = E_{\epsilon_2} = E_{\epsilon}$$

Y el campo eléctrico no cambia, y la diferencia de potencial entre conductores no cambia y por lo tanto podemos calcular F_e :

$$F_e = + \left. \frac{dU_e}{dx} \right|_v$$

$$dU_e = \Delta S dx \left(\frac{1}{2} \epsilon_2 \cdot \vec{E}_2^2 - \frac{1}{2} \epsilon_1 \cdot \vec{E}_1^2 \right) = \frac{1}{2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) E_{\epsilon}^2 \Delta S dx$$

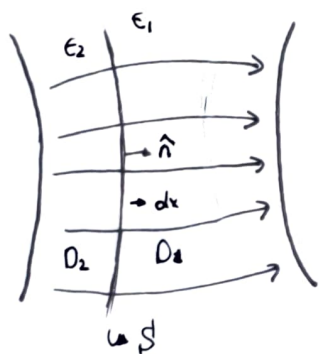


Entonces la fuerza por unidad de superficie:

$$\frac{\vec{F}}{\Delta S} = \vec{P}_E = \frac{1}{2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) E_e^2 \hat{n}$$

Es decir la presión / fuerza tiende a empujar la superficie hacia el dieléctrico que tiene menor permitividad.

Supongamos ahora que la superficie es normal (y sus desplazamientos) a \vec{D} y \vec{E} :



Dado que en la superficie de separación $\rho_{sib} = 0$ tenemos que:

$$D_1 = D_2 = D_n \quad (\text{en } S)$$

Está claro que la carga en los conductores es constante (\vec{D} no cambia) y por lo tanto tenemos que $\vec{F}_e = - \frac{dU_e}{dx} \Big|_a$. Como:

$$dU_e = \Delta S \cdot dx \cdot (D_n)^2 \cdot \left(\overset{\text{arriba}}{\frac{1}{2\epsilon_2}} - \overset{\text{baja}}{\frac{1}{2\epsilon_1}} \right) \rightarrow$$

$$\frac{F_e}{\Delta S} = P_e = \frac{1}{2} \cdot D_n^2 \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right)$$

En este caso la presión / fuerza actúa hacia el dieléctrico de menor permitividad.

• Ejemplo 7.7.3: fuerza entre los platos de un condensador plano paralelo. Calculamos primero usando la fórmula; luego la energía:

• Forma 1: Sabemos que: $\vec{F} = \frac{1}{2} \int \rho_s \cdot (\vec{E}_{arrn} - \vec{E}_{abajo}) dS$

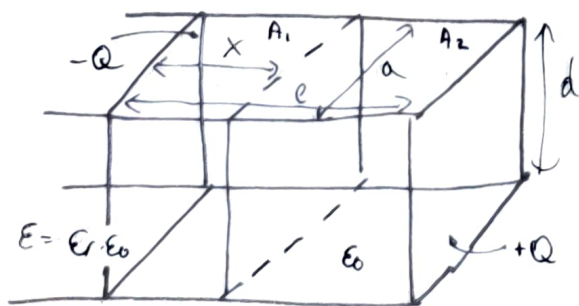
• Placa +Q: $\frac{1}{2} \int \rho_s \cdot \frac{Q}{A \cdot \epsilon} dS = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{A^2 \cdot \epsilon} \cdot A \rightarrow \vec{F} = \frac{Q^2}{2A \cdot \epsilon} \hat{z}$

• Placa -Q: $\frac{1}{2} \int \rho_s \cdot \frac{-Q}{A \cdot \epsilon} dS = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{A^2 \cdot \epsilon} \cdot A \rightarrow \vec{F} = \frac{Q^2}{2A \cdot \epsilon} \cdot (-\hat{z})$

• Forma 2: $dU_e = A \cdot dx \cdot \left(\frac{Q}{A \cdot \epsilon}\right)^2 \cdot \epsilon \cdot \frac{1}{2} \rightarrow dU_e = \frac{Q^2}{A \cdot \epsilon} \cdot \frac{dx}{2} \rightarrow$

$F = -\frac{dU_e}{dx} \Big|_a = -\frac{Q^2}{A \cdot \epsilon} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \text{Atractiva}$

• Ejemplo 7.7.4: calcula la fuerza que se opone a:



Sabemos que en este caso los capacitancias:

$$C = \frac{A_1 \cdot \epsilon_r \epsilon_0}{d} + \frac{A_2 \cdot \epsilon_0}{d}$$

$$A_1 = a \cdot x ; A_2 = a \cdot (l - x)$$

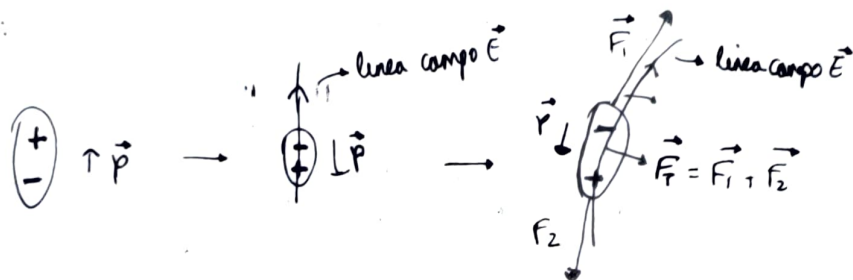
$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot a \cdot l}{d} + \frac{\epsilon_0 \cdot a \cdot x}{d} (\epsilon_r - 1)$$

Entonces está claro que $DV = \epsilon_0 \epsilon_r$; y que por lo tanto:

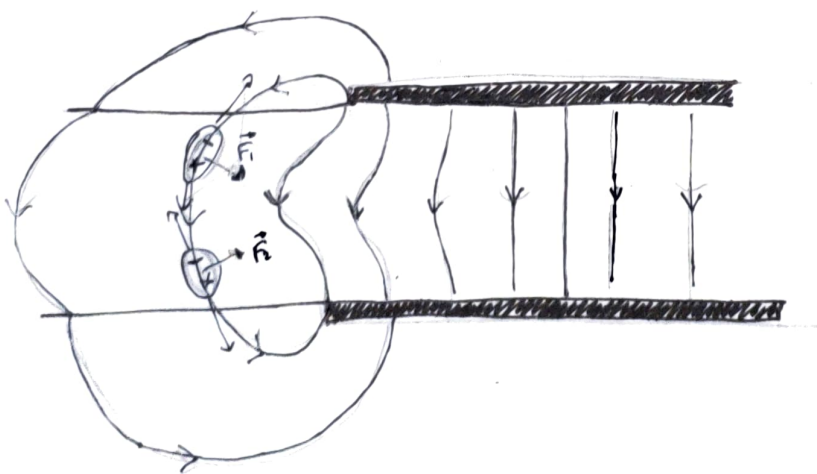
$$F_e = \left. \frac{dW_e}{dx} \right|_V = \frac{1}{2} V^2 \cdot \frac{d\epsilon_r}{dx} = \frac{1}{2} V^2 \cdot \frac{\epsilon_0 \cdot a}{d} (\epsilon_r - 1) \quad (F_e = F_e \hat{x})$$

esto implica que la fuerza tiende a meter el dieléctrico.

Ahora estudiemos un poco más la naturaleza de esta fuerza. Está claro que se debe dar por los efectos de bordes, ya que el campo \vec{E} dentro es perpendicular a \hat{x} . Debido a la naturaleza de los moléculas dipolares sabemos que:

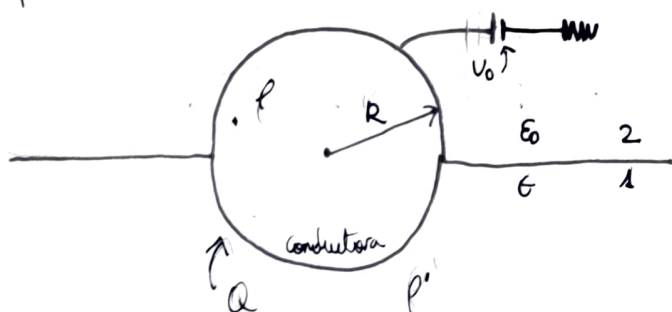


Como \vec{E} no es lineal entonces siempre va a existir una fuerza \vec{F} que afecta de forma diferente tanto a la carga $-$ como a la $+$;



Entonces hemos logrado calcular un efecto de bordes sin saber nada acerca de los campos en los bordes de los condensadores, ya que hemos usado las diferencias de energías, y al usar dx hemos mantenido la energía almacenada en los bordes constante. Solo cambia la energía del condensador.

• Ejemplo 7.7.4: ¿A qué potencial V_0 debe conectarse una esfera para que se mantenga sumergida hasta la mitad de un dieléctrico líquido de permeabilidad eléctrica ϵ y densidad ρ' ?



Como sabemos tenemos que resolver:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \rightarrow \begin{cases} \vec{D}_1 = \frac{A_1}{r^2} \hat{r} \rightarrow \vec{E}_1 = \frac{A_1}{\epsilon \cdot r^2} \hat{r} \\ \vec{D}_2 = \frac{A_2}{r^2} \hat{r} \rightarrow \vec{E}_2 = \frac{A_2}{\epsilon_0 \cdot r^2} \hat{r} \end{cases}$$

Además tenemos que alrededor de la esfera:

$$1) \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc} \stackrel{?}{=} Q \rightarrow A_1 + A_2 = Q / 2\pi$$

→ desconocida por ahora

2) En la superficie de contacto entre 1 y 2:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 \rightarrow \frac{A_1}{\epsilon} = \frac{A_2}{\epsilon_0}$$

Usando 1) y 2) tenemos que:

$$A_2 = \frac{Q \cdot \epsilon_0}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon)} \quad ; \quad A_1 = \frac{Q \cdot \epsilon}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon)}$$

Y los campos:

$$\vec{D}_1 = \frac{Q \cdot \epsilon}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon)} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \quad ; \quad \vec{D}_2 = \frac{Q \cdot \epsilon_0}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon)} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad ; \quad \vec{E} = \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon)} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Ahora calculamos Q en función de V_0 :

$$-\int_{-\infty}^R E \cdot dr = V_0 \rightarrow \frac{Q}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon)} \cdot \frac{1}{R} = V_0 \rightarrow Q = V_0 \cdot 2\pi(\epsilon_0 + \epsilon) \cdot R$$

Y luego la fuerza: $f_s = \hat{r} \cdot (\vec{D}_j - \vec{D}_d)$

$$\vec{F} = \int \frac{f_s^2}{2\epsilon_i} \frac{\hat{r}}{dS} = \int \frac{V_0^2 \cdot \epsilon^2}{2\epsilon} \cdot \frac{1}{R^2} dS_1 + \int \frac{V_0^2 \cdot \epsilon_0^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} dS_2$$

Para que quede por la mitad:

$$\vec{F} = \int \frac{(V_0 \epsilon)^2}{R^2} \cdot \frac{1}{2\epsilon} \cdot (\sin\theta \cos\theta, \sin\theta \sin\theta, \cos\theta) R^2 \sin\theta d\theta d\phi + (\dots)$$

$$\vec{F} = \int \frac{(V_0 \epsilon)^2}{2\epsilon} \cdot \cos(\theta) \sin(\theta) \hat{z} d\theta d\phi + \int \frac{(V_0 \epsilon_0)^2}{2\epsilon_0} \cos(\theta) \sin(\theta) \hat{z} d\theta d\phi \rightarrow$$

$$\vec{F} = \frac{V_0^2 \epsilon}{2} \cdot \pi \cdot \hat{z} + \frac{V_0^2 \cdot \epsilon_0}{2} \cdot \pi \cdot \hat{z} \rightarrow \vec{F} = \frac{V_0^2 \cdot \epsilon_0}{2} \cdot \pi \cdot (1 - \epsilon) \hat{z}$$

Ahora tenemos que calcular el peso y el empuje:

• Peso : $\vec{P} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho \cdot g \cdot (-\hat{z})$ (m · g)

• Empuje $\vec{E} = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot \rho' \cdot g \cdot \hat{z}$

Como está en equilibrio: $\vec{P} + \vec{E} + \vec{F} = 0 \rightarrow$

$$\frac{V_0^2 \cdot \epsilon_0}{2} \cdot \pi \cdot (1 - \epsilon_r) + \frac{2}{3} \pi R^2 \rho' - \frac{4}{3} \pi R^2 \rho \cdot g \rightarrow$$

$$V_0^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{R^3 \cdot g}{\epsilon_0} \cdot \frac{(\rho' - 2\rho)}{(\epsilon_r - 1)}$$

8. CORRIENTE ELECTROESTÁTICA

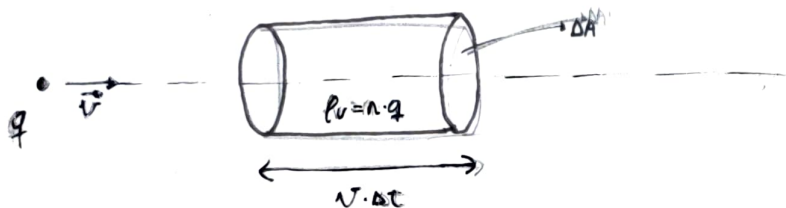
La electrostática estudia las relaciones entre cargas eléctricas en reposo. El flujo de carga eléctrica recibe el nombre de corriente eléctrica, y en este capítulo se diseñan varios procedimientos útiles para describir estas corrientes en general. También estudiaremos algunos aspectos de una clase particular de corrientes: los que fluyen por los conductores.

8.1. INTRODUCCIÓN:

¿Cómo describimos matemáticamente la corriente eléctrica (flujo de carga)? Si suponemos un único tipo de cargas con densidad $\rho = q \cdot n$ siendo $q \equiv$ carga, $n \equiv n^\circ$ cargas por unidad de volumen; con velocidad \vec{v} . Representamos el flujo de cargas por un vector cuya dirección es la del flujo que nos indica la cantidad de carga que pasa por unidad de superficie y unidad de tiempo a través de un elemento de superficie perpendicular al flujo. llamemos a dicho vector como

densidad volumétrica de corriente y lo representamos por el vector \vec{J} . El vector densidad volumétrica de corriente está relacionado con la velocidad media del flujo de las cargas.

Consideremos cargas con densidad $\rho_v = n \cdot q$ moviéndose a velocidad \vec{v} . Todos los cargos del cilindro de la figura atravesarán la superficie ΔA perpendicularmente al flujo en Δt :



$$\Delta Q = \rho_v v \cdot \Delta t \Delta A \rightarrow |\vec{J}| = \frac{\Delta Q}{\Delta t \Delta A} = \rho_v \cdot v = n \cdot q \cdot v$$

Dado que $\vec{J} \parallel$ flujo de las cargas:

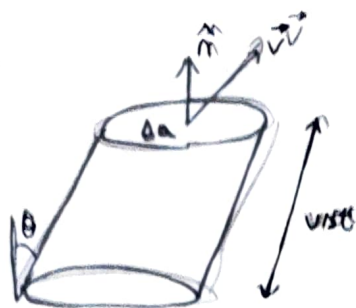
$$\vec{J} = \rho_v \cdot \vec{v} = n \cdot q \cdot \vec{v}$$

Si existiesen varios tipos de cargas:

$$\vec{J} = \sum \rho_{vi} \cdot \vec{v}_i = \sum n_i q_i \vec{v}_i$$

da carga por unidad de tiempo que atraviesa una superficie $\vec{\Delta a}$ arbitraria

$$dQ = \rho_v \cdot \Delta a \cdot \vec{v} \cdot \hat{n} \cdot \Delta t \rightarrow \left(\frac{dQ}{\Delta t} \right)_{\vec{\Delta a}} = \rho_v \cdot \vec{v} \cdot \vec{\Delta a} = \vec{J} \cdot \vec{\Delta a}$$



$$v dt \cdot \cos(\theta) = v \cdot \hat{n} dt$$

Si S es una superficie cualquiera (abierta o cerrada), la carga por unidad de tiempo que atraviesa S se llama intensidad de corriente (I), y se define como:

$$I_S = \left(\frac{dQ}{dt} \right)_S = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Según esta definición de Intensidad I puede ser positiva o negativa. Su signo depende de la elección de la normal a la superficie

dos unidades de la intensidad:

$$[I] = \frac{[Q]}{[t]} = \frac{\text{Coulombio}}{\text{segundo}} = \text{Amperio} = A$$

Y las unidades de la densidad de carga:

$$[\vec{J}] = \frac{[Q]}{[A][t]} = \frac{C}{m^2 \cdot s} = \frac{A}{m^2}$$

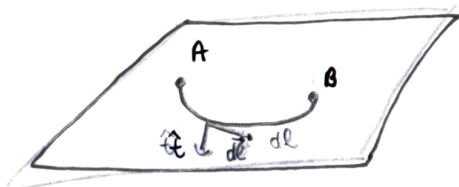
Si por alguna razón el movimiento de los cargas está confinado en una superficie, es posible definir \vec{K} como densidad superficial de corriente. Su dirección es la misma que la del flujo de cargas, y su módulo es la carga por unidad de longitud y unidad de tiempo a través de la línea que descansa sobre la superficie y esté colocada perpendicu-

lamente al flujo. Si tengo cargas con densidad superficial ρ_s moviéndose con velocidad \vec{v} , tendrá:

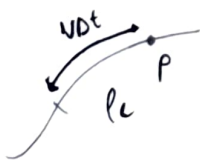
$$\vec{k} = \rho_s \cdot \vec{v} \quad [k] = \frac{A}{m}$$

La intensidad de corriente en este caso:

$$I_d = \int_A^B (\vec{k} \cdot \hat{e}) dl$$



Notese que el signo I depende de \hat{e} . También podemos definir la intensidad de corriente para la corriente filamental:



$$I = \rho_L \cdot v \quad [I] = A ; \vec{I} = \rho_L \cdot \vec{v}$$

Tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} dq &\sim \rho_L dv \sim \rho_s ds \sim \rho_L dl \\ \vec{v} dq &\sim \rho_L \vec{v} dv \sim \rho_s \vec{v} ds \sim \rho_L \vec{v} dl \\ v dq &\sim \vec{J} dv \sim \vec{k} ds \sim \vec{I} dl \end{aligned}$$

8.2. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

llamamos así a la expresión matemática de la ley de conservación de la carga. Sea V un volumen fijo (no cambia con el tiempo) limitado por una superficie S . La ley de conservación de la carga exige que la cantidad de carga eléctrica que sale a través de la superficie cerrada S en la unidad de tiempo debe ser igual a lo que disminuye en la unidad de tiempo la carga contenida en el interior. Siendo ρ_v la densidad de carga eléctrica, esto se expresa como:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{-dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_v dV$$

Como el volumen será fijo en el tiempo:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_v dV = \int_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dV$$

Y el teorema de Gauss:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV$$

Tenemos que:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} \right) dV = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

pt. es para un volumen cualquiera.

Esta es ecuación de la continuidad de la carga.

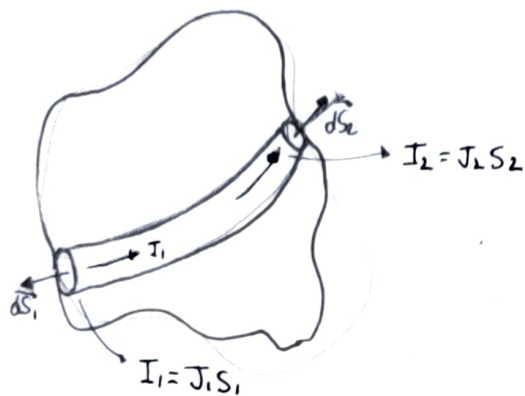
La ley de la conservación de la carga es el paradigma de las leyes de conservación en electromagnetismo. Es importante entender su significado. ¿Implica que la carga total del universo es constante? Por supuesto: esto es la conservación global de la carga. Pero la ley de conservación de la carga es una ley de conservación local, que representa un resultado mucho más restrictivo. Si la carga total cambia en un cierto volumen entonces exactamente la misma cantidad de carga ha entrado o salido del volumen a través de la superficie. Como diría el Griffiths: «El tigre no puede rematerializarse fuera de la jaula, si se metió de adentro hacia fuera debe haberse deslizado a través de un agujero de la valla»

La corriente se denomina continua, estacionaria o constante si ninguna de las magnitudes definidas anteriormente dependen del tiempo:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

↳ flujo de.

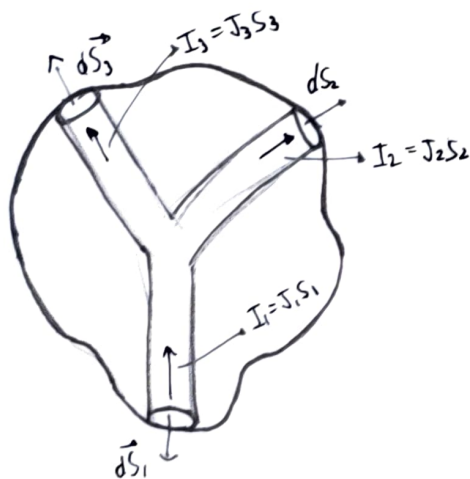
Esto es: para cualquier superficie cerrada entre la misma carga que sale. Para corrientes filamentosas esto implica que la corriente es constante en toda la sección del hilo.



$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow$$

$$-I_1 + I_2 = 0 \Rightarrow$$

$$I_1 = I_2$$



$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow$$

$$J_3 S_3 + J_2 S_2 - J_1 S_1 = 0 \Rightarrow$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

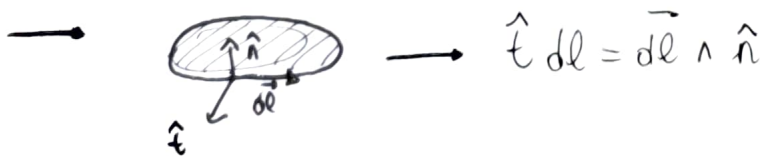
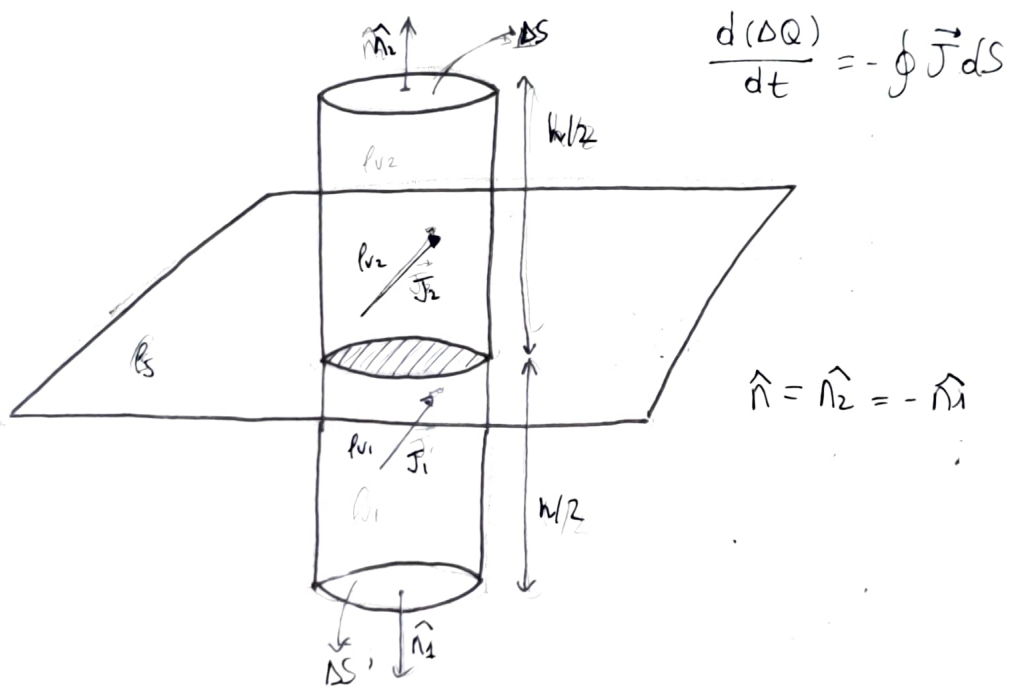
La ley de nodos de Kirchhoff es una deducción directa de la ley de conservación de carga local:

$$\sum_i I_i = 0$$

(Cada corriente tiene signo \pm dependiendo de si entra/sale).

8.3. CONDICIONES DE FRONTERA EN UNA SUPERFICIE DE DISCONTINUIDAD:

Si aplicamos la ley de conservación de la carga a un elemento de volumen, en forma de cilindro de sección ΔS y altura h , situado sobre una superficie de discontinuidad; resulta:



Si hacemos el cálculo en el límite $h \rightarrow 0$ y $\Delta S \rightarrow 0$ la carga contenida en el elemento:

$$\Delta Q = \rho_s \cdot \Delta S \rightarrow \frac{d(\Delta Q)}{dt} = \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \Delta S$$

Ya que la contribución del volumen es despreciable si $h \rightarrow 0$.
 El flujo de la densidad de corriente se descompone en una integral sobre los tapas y sobre la superficie lateral:

$$\oint \vec{J} d\vec{S} = \int_{s_b} \vec{J} d\vec{S} + \int_{s_l} \vec{J} d\vec{S} \rightarrow$$

$$\cdot \int_{s_l} \vec{J} d\vec{S} = \hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \Delta S$$

$$\cdot \int_{s_l} \vec{J} d\vec{S} = \int_C \vec{K} \cdot \hat{t} dl$$

Este segundo término se anularía si no existiera una corriente superficial \vec{K} en la superficie de separación. Por lo tanto:

$$(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \cdot \hat{n} + \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \vec{K} \cdot \hat{t} dl + \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \quad 8.3.1$$

Necesitamos interpretar el término del límite, que coincide con la definición del rotacional, si reescribimos $\hat{t} dl$ como: $d\vec{l} \wedge \hat{n}$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta S} \oint \vec{K} (d\vec{l} \wedge \hat{n}) \right) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \oint d\vec{l} \cdot (\hat{n} \wedge \vec{K}) = \hat{n} \cdot (\nabla \times (\hat{n} \wedge \vec{K}))$$

Es decir, en el término 8.3.1 aparece el rotacional:

$$\hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) + \hat{n} \cdot (\nabla \times (\hat{n} \wedge \vec{K})) + \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0$$

En el caso de los conductores ohmicos las corrientes superficiales son despreciables, así que:

$$\hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) + \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0$$

Además si estamos en el caso de corrientes continuas:

$$\hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = 0$$

8.4. TIPOS DE CORRIENTE:

Al igual que clasificamos los cargas en libres y ligados, podemos clasificar las corrientes en libres y ligadas. Dos corrientes que aparecerán en este curso:

- Corrientes de polarización: durante el proceso de polarización de un material dieléctrico, los cargas parecen moverse, por lo que es posible definir una densidad de corriente ligada:

$$\vec{J}_{pv} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

- Corrientes de magnetización: aparecen en Electromagnetismo II para el cálculo de campos en materiales magnéticos:

$$\vec{J}_{Mv} = \nabla \times \vec{M}$$

- Corrientes libres: son los que más controlamos, y los que tienen mayor interés. Una posible clasificación de las corrientes libres:

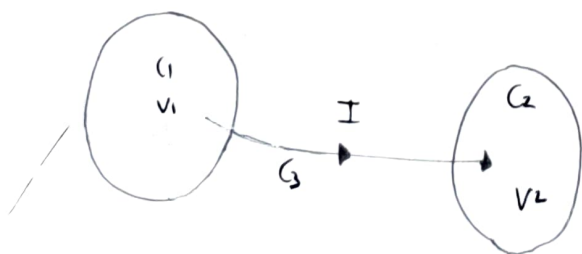
- Corrientes de conducción: incluye el movimiento de portadores de carga en conductores, semiconductores... los estudiaremos más específicamente más adelante.

• Corrientes de convección: movimiento de partículas cargadas en corrientes o flujos a través de un espacio... Se incluye en esta categoría también a la debida al movimiento del soporte material de los partículas de carga.

• Corrientes de difusión: producido por el movimiento térmico de los portadores al haber un gradiente de concentración.

CORRIENTES DE CONDUCCIÓN:

Supongamos dos conductores C_1 y C_2 cargados y aislados. Supongamos que $V_1 > V_2$. Si dichos conductores se unen por medio de un hilo conductor C_3 se produce una corriente eléctrica hasta que los conductores C_1 , C_2 y C_3 se encuentran al mismo potencial:



El ejemplo descrito se refiere a corrientes transitorias, ya que no se mantienen más que por un tiempo muy breve, hasta que se igualan los potenciales de todos los conductores.

Para mantener una corriente "permanente" es necesario mantener una diferencia de potencial constante entre C_1 y C_2 . Esto implica un continuo suministro de energía desde una fuente externa, situado en algún lugar del circuito cerrado. Esto puede conseguirse si C_1 y C_2 se conectan a los bordes de un dispositivo desconocido o fuente / generador de fuerza electromotriz. Este dispositivo debe ser estacionario, es decir, todas sus magnitudes asociadas al desplazamiento de las cargas deben ser independientes del tiempo, pero sí pueden variar de un punto a otro. Un generador es un dispositivo en cuyo interior los portadores de carga libre son sometidos a fuerzas de origen no electrostático, pudiendo ser de origen químico, mecánico, magnético (ley de inducción de Faraday...). El generador se caracteriza por producir una separación de las cargas libres en su interior y por lo tanto establecer una diferencia de potencial entre dos extremos (bordes).

No existe corriente en el generador ni no existe corriente por sus bordes terminales.

Nuestro generador será el siguiente rectángulo:



Entre los bordes P y N existe una diferencia de potencial. Para ello es necesario que actúen dos fuerzas: las electroestáticas y las no electroestáticas. llamamos \vec{f}_s a las fuerzas no electroestáticas por unidad de carga. Suponemos que \vec{f}_s solo existe dentro del generador. Se define fem:

$$\mathcal{E} = \int_N^P \vec{f}_s \cdot d\vec{\ell} \quad \leftarrow \text{dentro del generador.}$$

En un circuito abierto dado que no hay corrientes:

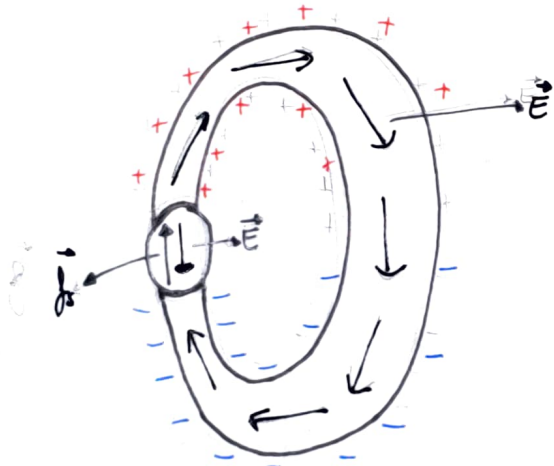
$$\vec{E} + \vec{f}_s = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{f}_s$$

$$\mathcal{E} = \int_N^P \vec{f}_s \cdot d\vec{\ell} = - \int_N^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_P - V_N$$

la f.e.m. de un generador es igual a la diferencia de potencial entre dos electrodos (extremos del generador) en circuito abierto.

la f.e.m se mide en Voltios. Supongamos que ahora conectamos los terminales del generador por el hilo conductor, for-

mando un circuito cerrado. En este caso el mecanismo de conducción es el siguiente: el generador empuja las cargas dentro de él y crea una distribución de cargas cuasiestáticas dentro de el circuito, no solo en la proximidad del generador. Esta distribución de cargas, si los conductores que cierran el circuito son homogéneos, ha de ser superficial, y dado que la propagación de los campos va a la velocidad de la luz, se establece casi inmediatamente. Es esta distribución de cargas la que se asegura que prácticamente todas las cargas del circuito se pongan en movimiento a la vez.



Estas cargas tienen una densidad de constante en todos los puntos y producen un campo eléctrico en todos los puntos del sistema. Fuera del generador la fuerza de las cargas es debido a este campo eléctrico. Dentro del generador será debida a las fuerzas no electrostáticas. Dado que $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$:

$$\mathcal{E} \equiv \oint_{\text{circ.}} \vec{J}_s \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{circ.}} \vec{J} \cdot d\vec{l} \quad \vec{J} = \vec{J}_s + \vec{E}$$

8.5. CONDUCTIVIDAD: LEY DE OHM

En general los líneas de corriente estacionaria en un conductor coinciden con las líneas de fuerza total que actúa sobre las cargas.

Así podemos escribir:

$$\vec{J} = \sigma \cdot (\vec{J}_s + \vec{E}) \quad \sigma \equiv \text{conductividad}$$

Los materiales para los que esta ecuación es válida se denominan medios lineales o óhmicos. Si no hay un generador:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

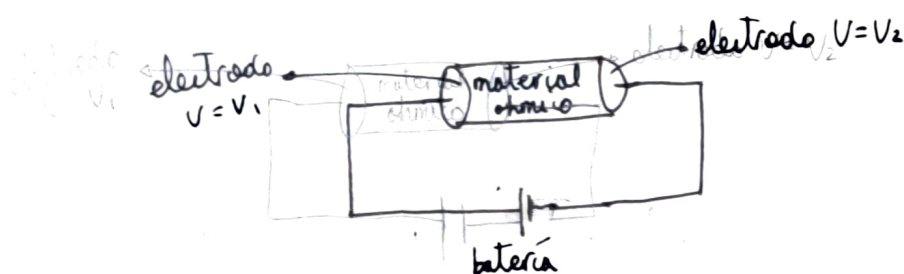
También escrito como:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \rho \vec{J}, \quad \rho = 1/\sigma$$

Donde ρ es la resistividad del conductor considerado. En general estos dos parámetros son funciones de la temperatura y posición, aunque no lo estudiaremos.

8.6. E.D. DEL CAMPO Y CORRIENTES

Un problema típico de conducción consta de un generador, dos electrodos de muy alta conductividad (a potencial constante) mediante los cuales se establece el campo \vec{E} , a través de los cuales la corriente entra y sale del sistema; y un material de baja conductividad en el cual queremos calcular las distribuciones de carga, campos y corrientes:



dos ecuaciones a resolver serán (fuera de los electrodos):

$$\nabla \times \vec{E} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0; \quad \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \text{ (conduc. óhmico).}$$

Si es un medio dieléctrico.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f; \quad \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \left(\frac{\epsilon}{\sigma} \cdot \vec{J} \right) = \vec{J} \cdot \nabla \left(\frac{\epsilon}{\sigma} \right)$$

↑ regla del producto

En un material conductor no homogéneo existirá una distribución de carga libre dentro del material.


En un material homogéneo, σ y ϵ constantes, entonces $\rho_v = 0$, a no ser que le suministremos cargas. Es una conclusión importante: la acumulación de cargas eléctricas que crean el campo electrostático que mantiene la corriente eléctrica no pueden estar en el volumen del conductor, cualquier distribución de cargas debe estar en la superficie entre los conductores o entre un conductor y un dieléctrico.

Si el medio es lineal, homogéneo e isotrópico:

$$\nabla \times \vec{E} = 0; \vec{E} = -\nabla \cdot \vec{J}; \nabla \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow$$

$$\nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla \cdot V) = 0 \rightarrow \nabla^2 V = 0$$

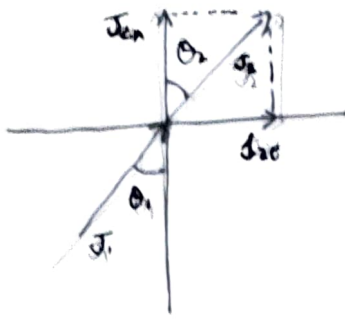
Podemos usar todo el conocimiento visto hasta ahora para resolver esta ec. de Laplace. dos condiciones de frontera:



$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{J} = 0 &\rightarrow \hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = 0 \quad (1) \\ \nabla \times \vec{E} = 0 &\rightarrow \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0; \vec{E}_2 = \vec{E}_1 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{De } (1) \rightarrow \sigma_2 E_{n2} = \sigma_1 E_{n1}; \text{ de } (2) \rightarrow \frac{\vec{J}_{e2}}{\sigma_2} = \frac{\vec{J}_{e1}}{\sigma_1} \rightarrow \vec{E} \text{ vector}$$

Por lo tanto en la superficie de separación entre dos medios de distinta conductividad, los líneas de corriente deben refractarse.



$$\tan \theta_2 = \frac{J_{2t}}{J_{2n}}$$

$$\tan \theta_1 = \frac{J_{1t}}{J_{1n}}$$

$$\rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{J_{1t} / J_{1n}}{J_{2t} / J_{2n}} = \frac{J_{1t}}{J_{1n}} \cdot \frac{J_{2n}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

la densidad superficial de carga libre en la superficie de separación será:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s \rightarrow \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$

$$\epsilon_2 \cdot E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \rho_s = \frac{\epsilon_2 J_{2n}}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1 J_{1n}}{\sigma_1} = \left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) J_n$$

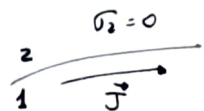
la densidad superficial de polarización será:

$$\begin{aligned} \rho_{ps} &= -\hat{n} \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) = P_{1n} - P_{2n} = \epsilon_0 \chi_{e1} E_{1n} - \epsilon_0 \chi_{e2} E_{2n} = \\ &= \left(\frac{\epsilon_0 \cdot \chi_{e1}}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_0 \cdot \chi_{e2}}{\sigma_2} \right) J_n \end{aligned}$$

Aquí podemos distinguir dos casos:

• El medio 2) no es un conductor $\sigma_2 = 0 \rightarrow \vec{J}_2 = 0 \rightarrow$

$J_{1n} = 0 \rightarrow$ Solo existe componente $J_{1t} \rightarrow$



Corriente paralela a S. Además: $E_{1n} = 0 = \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_S = 0$

• El medio 1 es un buen conductor y el medio 2 un mal conductor.
 Como $\sigma_1 \gg \sigma_2 \rightarrow \tan \theta_2 \approx 0$ y $\theta_2 \approx 0$. En este caso la corriente que entra por la superficie sale perpendicularmente a ella.
 Además:

$$J_s = \left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) J_n \approx \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} J_n \approx \epsilon_2 \cdot E_{2n} = D_{2n}$$

8.7. RESISTENCIA:

Donde la pieza de material óhmico sobre la que los electrodos hacen contacto en las superficies S_1 y S_2 , definiremos resistencia como la razón entre la diferencia de potencial entre ambos electrodos y la intensidad que fluye a la pieza desde el electrodo:

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I}$$

La resistencia se mide en ohmios (Ω); y su inverso se llama la conductancia

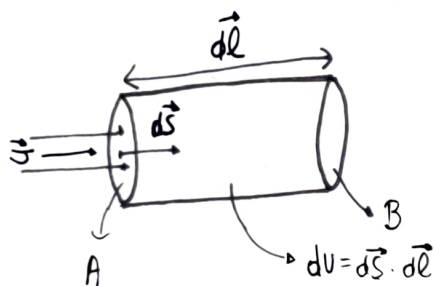
$$G = 1/R$$

Y se mide en Siemens o mho (Ω^{-1})

8.8. RELACIONES ENERGÉTICAS:

Veamos ahora que toda la circulación de corriente lleva asociada una pérdida de energía eléctrica en forma de calor.

Consideremos un tubo de longitud $d\ell$ y sección dS . En un intervalo de tiempo dt entra por A, una carga total $dq = \vec{J} \cdot d\vec{S} \cdot dt$, y sale por B una carga igual:



Ahora bien, para que esto ocurra es necesario una diferencia de potencial entre A y B ($V_A > V_B$), lo que supone una pérdida de energía eléctrica:

$$dW = (V_A - V_B) dq \rightarrow dW = (V_A - V_B) \cdot \vec{J} \cdot d\vec{S} dt$$

Como $(V_A - V_B) = (\vec{E} \cdot d\vec{\ell})$ y $d\vec{\ell} \parallel \vec{J}$ tenemos que:

$$dW = (\vec{E} \cdot d\vec{\ell}) (\vec{J} \cdot d\vec{S}) dt = (\vec{E} \cdot \vec{J}) \underbrace{(d\vec{\ell} \cdot d\vec{S})}_{dV} dt$$

Y por lo tanto: $\frac{dP}{dV} = \frac{d}{dV} \left(\frac{dW}{dt} \right) = (\vec{E} \cdot \vec{J})$

Aquí P es la energía perdida por unidad de tiempo. En consecuencia,

el consumo de energía eléctrica por unidad de volumen y de tiempo debido a la corriente, es igual al producto del vector densidad de corriente por intensidad del campo eléctrico:

$$\frac{dP}{dV} = \sigma E^2 \quad \text{si} \quad \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Esta cantidad es siempre positiva, indicando un cambio neto. Como la densidad de corriente de entrada es la misma que la de salida tenemos que la velocidad de los portadores es la misma, por lo que la energía cinética es la misma, y la energía consumida se pierde en forma de calor.

La energía total disipada es necesaria para mantener la corriente eléctrica. Como $dP = \sigma E^2 dV$:

$$P = \int \sigma E^2 dV$$

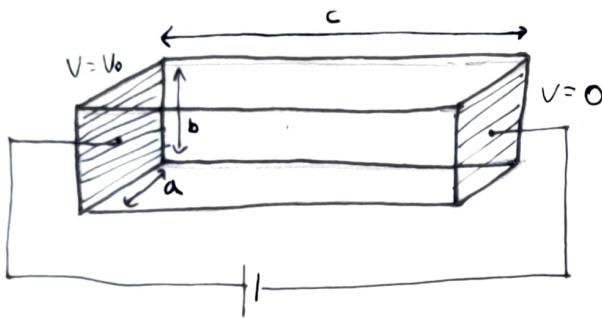
Este resultado es conocido como ley de Joule. En un generador:

$$P_g = \int \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot dV$$

Y como \vec{J} es paralelo a \vec{J}_s y anti-paralelo a \vec{E} : $P_g < 0$

• Ejemplo 8.8.1: supongamos un paralelepípedo de lados a, b, c ; hecho de material l.h.i. de conductividad σ . Calcula su resistencia cuando se aplica una diferencia de potencial V_0 entre los platos. ¿Es la resistencia una propiedad intrínseca del material? Calcula la potencia disipada.

Vamos a estudiar dos formas de resolver el problema:



1) A partir de la ec. de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \quad \begin{cases} V|_{z=0} = V_0 \\ V|_{z=c} = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_S = 0 \quad \text{en caras laterales}$$

Podemos suponer que $V = V(z)$, y como si encontramos una solución de esta forma tenemos que debe ser la única posible (teorema) no habrá problemas:

$$\nabla^2 V = 0 \rightarrow \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \rightarrow V = A \cdot z + B$$

$$\text{Como } V(z=0) = V_0 \rightarrow B = V_0 \rightarrow V(c) = 0 \rightarrow A = -\frac{B}{c} \rightarrow A = -\frac{V_0}{c}$$

$$\text{Entonces } V = V_0 \cdot \left(1 - \frac{z}{c}\right)$$

$$\text{Como } \vec{E} = -\nabla V \rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{c} \hat{z} \rightarrow \vec{J} = \sigma \cdot \frac{V_0}{c} \hat{z}$$

Ahora calculamos la intensidad:

$$I = \int \vec{J} d\vec{S} = \sigma \cdot \frac{V_0}{c} \cdot (a \cdot b)$$

Entonces:

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{c}{(a \cdot b)}$$

La resistencia no es una propiedad intrínseca, depende del tamaño.

2) Podemos suponer que:

$$\vec{J} = J(z) \cdot \hat{z} \rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow \frac{dJ}{dz} = 0 \rightarrow \vec{J} = J \cdot \hat{z}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{J}{\sigma} \cdot \hat{z}$$

$$\text{Como } \int_+ \vec{E} d\vec{l} = V_0 \rightarrow c \cdot \frac{J}{\sigma} = V_0 \rightarrow J = \sigma \cdot \frac{V_0}{c}$$

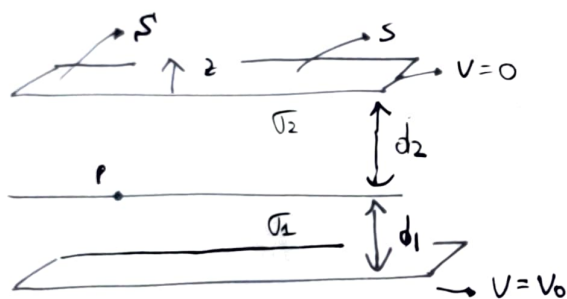
$$\text{Entonces } I = \int \vec{J} d\vec{S} = \frac{V_0 \cdot \sigma}{c} \cdot (a \cdot b) \rightarrow R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{c}{a \cdot b} = \rho \cdot \frac{b}{a \cdot c}$$

La potencia disipada:

$$P = \int \vec{E} \cdot \vec{J} = \sigma \cdot \int \vec{E}^2 dV = \sigma \cdot \frac{V_0^2}{c^2} \cdot a \cdot b \cdot c = I^2 \cdot R = V_0 \cdot I = \frac{V_0^2}{R}$$

• Ejemplo 8.8.2: se dispone dos placas conductoras plano-paralelas de muy alta conductividad. El área de los placas es S , con dos conductores ohmicos de conductividades σ_1 y σ_2 . El espesor de del conductor σ_1 es d_1 y del σ_2 es d_2 . Se conecta a una f.e.m. de potencial V_0 y resistencia interna despreciable.

- Calcula \vec{J} y \vec{E} en los conductores
- Resistencia total
- Potencia disipada
- Si 1 tiene ϵ_1 y 2 ϵ_2 ; calcula $\rho_v, \rho_s, \rho_{es}, \rho_{ev}$.



$$\vec{J} = J(z) \cdot \hat{z}$$

$$\nabla J = 0 \rightarrow J(z) = J$$

$$\text{Entonces: } \vec{J} = \begin{cases} J_1 \cdot \hat{z} & \text{en } d_1 \\ J_2 \cdot \hat{z} & \text{en } d_2 \end{cases}$$

En P tiene que ser continuo: $J_1 = J_2 = J$. Ahora los campos:

$$\vec{E}_1 = \frac{J}{\sigma_1} \hat{z} ; \vec{E}_2 = \frac{J}{\sigma_2} \hat{z}$$

Por lo que:

$$\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{J}{\sigma_1} d_1 + \frac{J}{\sigma_2} d_2 = V_0 \rightarrow J = V_0 \cdot \left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2} \right)^{-1}$$

$$J = V_0 \cdot \left(\frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{d_1 \cdot \sigma_2 + d_2 \cdot \sigma_1} \right) \rightarrow I = V_0 \cdot \left(\frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{d_1 \cdot \sigma_2 + d_2 \cdot \sigma_1} \right) \cdot S ; R = \frac{V_0}{I}$$

$$R = \frac{1}{S} \cdot \frac{d_1 \cdot \sigma_2 + d_2 \cdot \sigma_1}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{d_1}{S \cdot \sigma_1} + \frac{d_2}{S \cdot \sigma_2}$$

da potencia despendida:

$$P = \int \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \int_{V_1} \vec{J} \cdot \vec{E}_1 dV_1 + \int_{V_2} \vec{J} \cdot \vec{E}_2 dV_2$$

$$P = \left(S \cdot d_1 \cdot \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{(\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1)} \cdot \frac{\sigma_1}{(\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1)} + S \cdot d_2 \cdot \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{(\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1)} \cdot \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1)} \right) V_0^2$$

$$= I^2 \cdot \left(\frac{d_1}{\sigma_1 \cdot S} + \frac{d_2}{\sigma_2 \cdot S} \right) = I^2 \cdot R$$

Si existen dichas permitividades:

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \cdot \vec{E}_1 ; \quad \vec{D}_2 = \epsilon_2 \cdot \vec{E}_2 ;$$

Como $\nabla \cdot \vec{D} = 0 = \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{J}$ tenemos que $\rho_v = 0$

En la superficie:

$$\bullet 2: \rho_{s_2} = \hat{z} \cdot (\vec{D}_j - \vec{D}_k) = \hat{z} \cdot (-\vec{D}_2) = -V_0 \frac{\epsilon_2 \cdot \sigma_1}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$$

$$\bullet 1: \rho_{s_1} = \hat{z} \cdot (\vec{D}_j - \vec{D}_k) = \hat{z} \cdot (\vec{D}_1) = V_0 \cdot \frac{\epsilon_2 \cdot \sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$$

Y las densidades de polarización:

$$\vec{P}_1 = \frac{V \cdot \sigma_2 \cdot (\epsilon_1 - \epsilon_0)}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} \quad \vec{P}_2 = \frac{V \cdot \sigma_1 (\epsilon_2 - \epsilon_0)}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$$

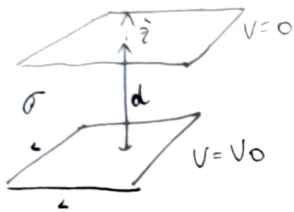
Entonces:

$$\xrightarrow{\uparrow \hat{z}} \rightarrow \rho_{s_2} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \cdot E_2$$

$$\xrightarrow{\quad} \rightarrow \rho_{pm} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \cdot E_1 - (\epsilon_2 - \epsilon_0) \cdot E_2$$

$$\xrightarrow{\quad} \rightarrow \rho_{s_1} = -(\epsilon_1 - \epsilon_0) \cdot E_1$$

• Problema 8.8.3: entre dos electrodos plano- paralelos cuadrados de lado L separados por d hay un material de conductividad $\sigma = \sigma_0 \cdot (1 + z/d)$. Si se aplica una dif. de pot. V_0 ; calcula los campos \vec{J} y \vec{E} y la resistencia.



$$\vec{J} = J(z) \cdot \hat{z} \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow$$

$$\vec{J} = J \cdot \hat{z} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{J \cdot \sigma_0}{(1 + z/d)} \hat{z}$$

$$\text{Entonces } \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_0 \rightarrow \frac{J \cdot d}{\sigma_0} \ln(1 + z/d) \Big|_0^d = \frac{J \cdot d}{\sigma_0} \ln(2)$$

$$J = \frac{\sigma_0 \cdot V_0}{d \ln(2)} \rightarrow I = \int J dS = \frac{\sigma_0 \cdot V_0}{d \ln(2)} L^2$$

$$\text{Entonces: } R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{V_0}{\frac{\sigma_0 \cdot V_0}{d \ln(2)} L^2} = \frac{d \ln(2)}{\sigma_0 \cdot L^2}$$

8.9. RESISTENCIA Y CAPACIDAD:

Supongamos dos medios conductores de alta conductividad (electrodos). Existen dos maneras en los que pueden ser utilizados:

- Como condensador. La región entre conductores se llena con un medio l.h.i. de constante ϵ . Definimos capacidad del condensador:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Para calcular la capacidad:

- 1) Suponemos $+Q$ y $-Q$ en los condensadores
- 2) Calculamos \vec{E}
- 3) $\Delta V = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l}$ (cualquier trayectoria).
- 4) da carga libre en la carga positiva:

$$Q = \int_S \rho_s dS = \epsilon \cdot \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{ya que } \rho_s = \hat{n} \cdot \vec{D}|_s = \hat{n} \cdot \epsilon \vec{E}$$

$$C = \frac{\epsilon \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

- Como una resistencia. llamamos al espacio entre los placas con un conductor l.h.i. de conductividad σ . Mantenemos la misma diferencia de potencial entre las placas que en el caso anterior.

Nótese que el potencial y el campo \vec{E} es el mismo que antes, la corriente total entre las placas es.

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sigma \cdot \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

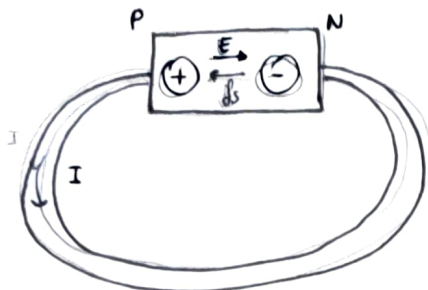
La resistencia entonces:

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\int_+ \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\sigma \cdot \int \vec{E} \cdot d\vec{S}} = \frac{\epsilon}{\sigma} \cdot \frac{1}{C}$$

Por lo tanto $C \cdot R = \frac{\epsilon}{\sigma}$. Es muy útil esta relación experimentalmente, ya que es más fácil de calcular R que C .

8.10. ECUACIÓN DEL CIRCUITO:

• Generador ideal:



$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint (\vec{E} + \vec{j}_s) \cdot d\vec{\ell} = \int_P^N \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\text{bat}} (\vec{E} + \vec{j}_s) \cdot d\vec{\ell} = \int_P^N \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \\ &= \int_P^N \frac{\vec{I} \cdot d\vec{\ell}}{S \cdot \sigma} = I \cdot \int_P^N \frac{d\ell}{\sigma \cdot S} = R \cdot I \end{aligned}$$

Donde hemos supuesto: $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{\vec{I}}{S \cdot \sigma}$

$$\begin{aligned} \text{Además: } P = 0 &= \int_N^P \vec{E} \cdot \vec{j} \, dV + \int_P^N \vec{E} \cdot \vec{j} \, dV = - \int_N^P \vec{j}_s \cdot \vec{j} \, d\ell \, dS + \int_P^N \sigma E^2 \, dV \\ &= - I \cdot \underbrace{(V_P - V_N)}_e + R \cdot I^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} \cdot I = R \cdot I^2$$

↳ Pat. disipada por R
↳ Pat. suministrada por las fuentes

• Generador no ideal: en este caso $|\vec{j}_s| > |\vec{E}|$, de forma que existe corriente en el interior del generador.

• En la fuente: $\vec{J} = \sigma_g \cdot (\vec{E} + \vec{j}_s)$

• Fuera: $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_N^P \vec{j}_s \cdot d\vec{\ell} = \oint (\vec{E} + \vec{j}_s) \cdot d\vec{\ell} = \int_N^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_N^P (\vec{E} + \vec{j}_s) \cdot d\vec{\ell} \\ &= R \cdot I + \int_N^P \frac{\vec{J}}{\sigma_g} \cdot d\vec{\ell} = R \cdot I + R_r \cdot I \quad * \text{ recordemos que } \vec{J} \text{ entra solo por los electrodos.} \end{aligned}$$

Además podemos reescribirlo: $\mathcal{E} = (R + R_r) \cdot I \rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{(R + R_r)}$

Y por definición:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_N^P \vec{E} \cdot \vec{J} \, dV + \int_P^N \vec{E} \cdot \vec{J} \, dV = \int_N^P \left(\frac{\vec{J}}{\sigma_g} - \vec{j}_s \right) \cdot \vec{J} \, dV + \int_P^N \vec{E} \cdot \vec{J} \, dV \\ &= r \cdot I^2 - \mathcal{E} \cdot I + R \cdot I^2 \rightarrow \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$\mathcal{E} \cdot I = r \cdot I^2 + R \cdot I^2$$

Donde hemos demostrado las leyes de Kirchhoff:

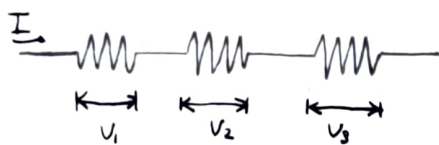
• 1ª ley: $\sum_i I_i = 0$ (en un nodo)

• 2ª ley: $\sum_i \mathcal{E}_i - \sum R_j I_j = 0$ (en un recorrido cerrado)

8.11. ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS:

Para obtener la resistencia equivalente de una asociación de resistencias en serie o paralelo, se procede de la siguiente forma:

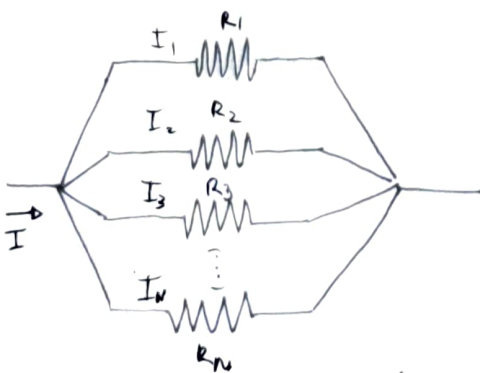
• Asociación en serie:



$$V = \sum_i V_i = I \cdot \sum R_i = I \cdot R_{eq}$$

$$R_{eq} = \sum R_i$$

• Asociación en paralelo: la diferencia de potencial entre los extremos de cada una de las resistencias de la asociación en paralelo es siempre igual a V . Además por la ley de los nodos:



$$V = I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2 = (\dots) = I_n \cdot R_n$$

$$I = \sum I_i = \sum \frac{V}{R_i} = V \cdot \sum \frac{1}{R_i}$$

$$\text{Como } R_{eq} = \frac{V}{I} \rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

8.12. RELAJACIÓN DE LA CARGA:

La relajación de la carga puede ocurrir en el volumen o en los interfonos.

VOLUMEN:

Este apartado no pertenece exactamente a corrientes estacionarias, ya que cuando se trata de situaciones variables en el tiempo, las ecuaciones deben ampliarse para incluir la evolución de la densidad de carga:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v, \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

Este tipo de ecuaciones nos permite plantear el siguiente problema. Supongamos una cierta densidad de carga libre en un conductor, el sistema no se encontrará en equilibrio electrostático, ya que habrá un reordenamiento de la carga, de forma que en el estado final toda la carga se redistribuye en la superficie del conductor y el campo en el interior sea nulo. Este reordenamiento no es instantáneo, y supondremos que es lo suficientemente lento como para que las ecuaciones de la electrostática sigan siendo válidas. Si tenemos un medio lineal, homogéneo e isotrópico:

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}; \quad \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \rho_v / \epsilon$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \rightarrow \sigma \cdot \nabla \cdot \vec{E} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v = 0$$

Entonces la solución, suponiendo una densidad de carga ρ_{v0} en $t=0$; tenemos que será:

$$\rho_v = \rho_{v0} \cdot e^{-\frac{\sigma \cdot t}{\epsilon}}$$

El cociente $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$ tiene unidades de tiempo y recibe el nombre de tiempo de relajación.

Entonces de acuerdo con la ecuación; si $\rho_v = 0$ en un instante cualquiera, entonces no puede haber densidad en ese punto en ningún instante posterior. La hipótesis implícita es que el campo eléctrico \vec{E} debido a las cargas, es la única causa del flujo de corrientes.

En circunstancias normales, no existe acumulación de cargas dentro de cualquier conductor homogéneo, pero sí puede existir en algunos no homogéneos o en las superficies de separación.

Todo esto es válido solo para conductores no muy buenos. En caso contrario hay que tener en cuenta las ecs. de Maxwell.

INTERFASES:

Cuando tenemos una frontera entre dos medios por los cuales circula una corriente diferente, puede producirse una acumulación de carga sobre la misma. La variación de esta densidad de carga viene dada por la diferencia entre la corriente que llega y que sale de la frontera.

Tenemos que la condición para medios óhmicos:

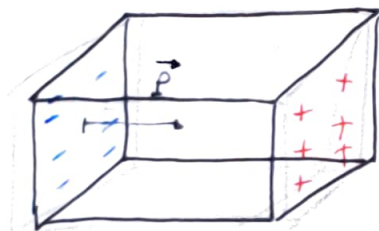
$$\hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (1)$$

A diferencia de lo que ocurre en el volumen, en estas superficies puede haber carga superficial distinta de cero. Para medios lineales puede reducirse la ec. anterior (1) a una E.D. que liga valores de \vec{E} a otros valores. Esta C.C. hace que cuando se tenga un proceso de relajación en la frontera no sea $\epsilon \sigma$; sino algo mucho más complejo, dependiendo de ambos medios...

8.13. CORRIENTES DE POLARIZACIÓN

Además de la corriente asociada con la carga libre, existe corriente debido al cambio de polarización.

Consideramos un elemento de volumen en el interior del material en forma de paralelepípedo. Supongamos que \vec{P} es paralelo a uno de los lados y es uniforme:



Si $\vec{P}(t)$ aumenta, las cargas de ambas caras aumentan, y a todos los efectos, es como si fluyera carga de un lado a otro, y una corriente estuviera circulando en el sistema. Podemos calcular el valor de esta corriente a partir de la ec. de continuidad para la carga de polarización:

$$\frac{\partial \rho_{pv}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla \cdot \vec{P}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right)$$

Si definimos $\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ (corriente de polarización) se verifica:

$$\nabla \cdot \vec{J}_p + \frac{\partial \rho_{pv}}{\partial t} = 0$$

X para las cargas superficiales:

$$\hat{n} \cdot (\vec{J}_{pe} - \vec{J}_{ps}) + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

Al igual que para las corrientes libres, existe un consumo de energía asociado a las corrientes de polarización: la potencia por unidad de volumen será:

$$\frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Esta potencia se emplea en polarizar el medio, ya que al separar las cargas para producir un dipolo o rotar un dipolo permanente se debe realizar un trabajo efectuado por un campo eléctrico.